


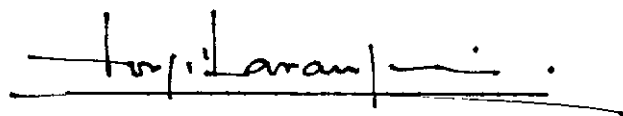
VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE VIBRA -
ÇÕES PARAMÉTRICAS EM VIGAS.

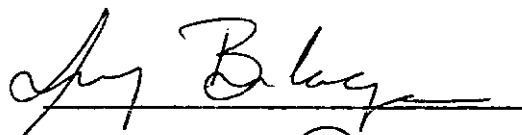
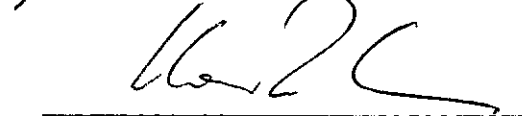
RENY SIMÃO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovado por:


Presidente



RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
MARÇO DE 1974

ã meus pais.

ã Moema, Luciano e Daniela.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, COPPE/UFRJ, NCE/UFRJ, FFEUnU.

Aos professores Arthur Palmeira Ripper Neto, pela valiosa orientação e Hans Ingo Weber, pelo auxílio e apoio.

Aos funcionários da COPPE.

Aos colegas, à José Carlos e Antonino.

Aos amigos Francisco Parente, Angelo, Larangeira, e à Francisco Lépore pelo inestimável apoio e colaboração.

À meus pais, Seme e Nazira, à meu irmão John pelo incentivo, à tio Jorge e Edison.

À Moema pelo apoio e compreensão de sempre.

RESUMO

Este trabalho constitui-se basicamente da verificação experimental da teoria existente sobre vibração paramétrica de uma viga sujeita a uma carga axial de compressão P , menor que a carga crítica de flambagem, e por um momento torçor periódico aplicado em uma de suas extremidades, da forma $T = T_0 + T_1 \cos \Omega t$, sendo os parâmetros T_0 , T_1 e Ω independentes entre si.

As regiões de instabilidade elastodinâmica, levantadas experimentalmente para diversos valores da carga de compressão, e com as condições de vínculo bi-engastada à flexão e engastada à torção, são comparadas com os resultados teóricos.

ABSTRACT

This thesis is an experimental investigation of parametric resonance of a bar subjected to an axial compressive force P , smaller than the buckling load and to an oscillating torque of the type $T = T_0 + T_1 \cos \Omega t$, where T_0 , T_1 e Ω are independent parameters.

The regions of elastodynamic instability are determined experimentally for a bar fixed in flexure at both ends and fixed-free in torsion, for various values of the axial compression.

The results are compared with those of an existing theory.

ÍNDICE

	<u>pag.</u>
CAPÍTULO I - <u>INTRODUÇÃO</u>	1
CAPÍTULO II - <u>MONTAGEM EXPERIMENTAL</u>	
2.1 - VIGA DE TESTES	9
2.2 - DISPOSITIVO DE COMPRESSÃO	12
2.3 - SISTEMA DE EXCITAÇÃO	14
2.3.1 - TRANSDUTOR ELETRODINÂMICO	14
2.3.2 - TRANSDUTOR MAGNÉTICO	17
CAPÍTULO III - <u>MÉTODOS DE LEITURA</u>	
3.1 - ILUMINAÇÃO ESTROBOSCÓPICA	18
3.2 - TRANSDUTOR CAPACITIVO	19
3.3 - SISTEMA ÓTICO	19
3.4 - TRANSDUTOR DE CRISTAL DE QUARTZO	22
CAPÍTULO IV - <u>EXPERIÊNCIAS</u>	
4.1 - APARELHAGEM USADA	29
4.2 - CALIBRAÇÃO DO SISTEMA	29
4.3 - OBTENÇÃO DOS GRÁFICOS RESPOSTA (TABELAS)	35
CAPÍTULO V - <u>RESULTADOS</u>	
5.1 - RESULTADOS TEÓRICOS	39
5.2 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS	51
GRÁFICOS	53
CAPÍTULO VI - <u>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</u>	

6.1 - CONCLUSÕES	65
6.2 - SUGESTÕES	68

<u>LISTA DE SÍMBOLOS</u>	69
--------------------------	----

<u>BIBLIOGRAFIA</u>	72
---------------------	----

<u>APÊNDICE I</u> - CALIBRAÇÃO DO DISPOSITIVO DE COMPRESSÃO	75
---	----

<u>APÊNDICE II</u> - CURVA DE IMPEDÂNCIA DO TRANSDUTOR DE QUARTZO	77
---	----

<u>APÊNDICE III</u> - DETERMINAÇÃO DA SENSIBILIDADE DINÂMICA DO TRANSDU- TOR PIEZO-ELÉTRICO PZT5	79
---	----

<u>APÊNDICE IV</u> - CÁLCULO DO PARÂMETRO ϵ	82
--	----

<u>APÊNDICE V</u> - CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DAS VIBRAÇÕES TORCIONAIS	83
--	----

<u>APÊNDICE VI</u> - CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DAS VIBRAÇÕES FLEXIONAIS	85
---	----

<u>APÊNDICE VII</u> - CURVA DE $k = f(b, h)$	87
--	----

<u>FOTOS</u>	89
--------------	----

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O fenômeno de ressonância paramétrica foi observado pela primeira vez por MELDE em 1859. Este observou que, uma mola helicoidal fixa em uma de suas extremidades, quando era excitada axialmente, por um diapasão na outra extremidade, ocorria, em certas frequências, além das vibrações axiais esperadas outras transversais.

RAYLEIGH (1883 - 1887) deu a primeira explicação teórica sobre o problema e realizou outras experiências que permitiram distinguir claramente as vibrações paramétricas das vibrações forçadas.

Em 1924 BELIAEV publicou um artigo que analisa a resposta paramétrica de uma coluna bi-engastada sob ação de um carregamento axial pulsante (dependente do tempo), reduzindo as equações de movimento às equações de MATHIEU-HILL, e determinando as contornos das principais regiões de instabilidade. KRYLOV e BOGOLIUBOV voltaram ao problema e examinaram o caso de condições de vínculo arbitrárias.

Posteriormente, na década de 1940, trabalhos experimentais realizados por BOLOTIN, UTIDA - SEZAWA e SOMERSET, verificaram que a coluna descrita por BELIAEV podia ser analisada pela investigação de instabilidade das soluções de sua equação. Estes foram os primeiros trabalhos não russos sobre o tema.

A seguir, podem ainda ser citadas as contri-

buições ao tema dadas por HSU, EVAN - IWANOWSKI e METTLER.

HSU⁽¹⁾ analisa teoricamente o caso de um sistema dinâmico com múltiplos graus de liberdade sob ação de uma excitação paramétrica. Em seu artigo uma análise em primeira aproximação é desenvolvida e os critérios de instabilidades são deduzidos explicitamente.

Trabalhos experimentais e teóricos sobre instabilidade dinâmica de colunas elásticas foram desenvolvidos por SOMERSET e EVAN - IWANOWSKI⁽²⁾. Estes investigaram a instabilidade paramétrica de colunas sujeitas a uma carga axial da forma $P = P_0 + P_1 \cos \Omega t$, onde, P_0 , P_1 e Ω são parâmetros independentes. As regiões do parâmetro espacial (P_0, P_1, Ω) , nas quais a coluna, com e sem amortecimento, é ou não instável, foram estabelecidas experimentalmente chegando-se a resultados concordes com os previstos pela teoria.

Dentre os trabalhos realizados em nosso país podem ser destacados os de autoria de HAGEDORN⁽³⁾, HAGEDORN & KOVAL⁽⁴⁾ e LARANGEIRA⁽⁵⁾.

LARANGEIRA analisou a instabilidade elasto-dinâmica de uma viga, sob várias condições de vinculação, sujeita axialmente a uma força de compressão P , menor que a crítica de flambagem, e a um momento torçor periódico, da forma $T = T_0 + T_1 \cos \Omega t$, em uma de suas extremidades.

As equações de movimento da viga mostrada na figura (1.1) foram estabelecidas pelo Princípio de Hamilton, integradas pelo método de Galerkin, resultando em sistemas de equações diferenciais

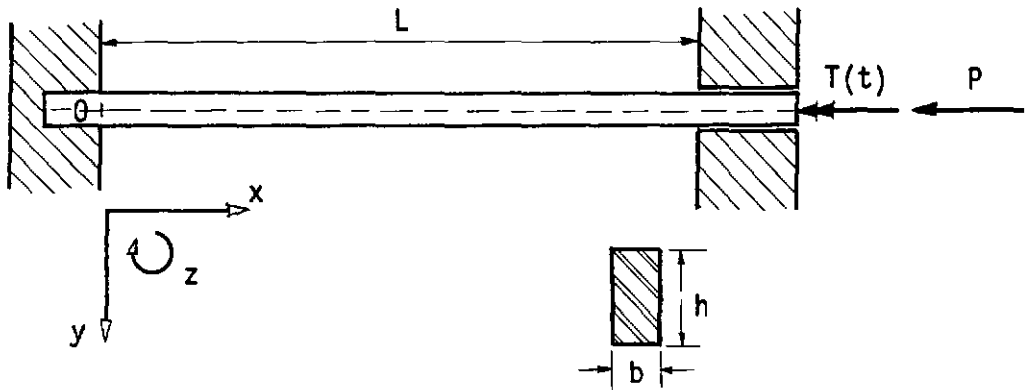


Fig. 1.1

de Mathieu-Hill, em termos de coordenadas generalizadas, dadas na forma geral por:

$$\ddot{q}_{1r}(t) + \omega_{1r}^2 q_{1r}(t) + \varepsilon \cos \Omega t \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} q_{2p}(t) = 0 \quad (1.1)$$

$$r = 1, 2, \dots$$

$$\ddot{q}_{2r}(t) + \omega_{2r}^2 q_{2r}(t) - \varepsilon \cos \Omega t \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} q_{1p}(t) = 0 \quad (1.2)$$

$$r = 1, 2, \dots$$

sendo:

$q_{1r}(t)$ - coordenadas generalizadas associadas aos modos de ordem r das vibrações flexionais da viga no plano XY;

$q_{2r}(t)$ - idem acima, no plano XZ;

- ω_{1r} - frequência natural do modo de ordem r das vibrações flexionais da viga no plano XY;
 ω_{2r} - idem acima, no plano XZ;
 Ω - frequência de excitação;
 ϵ - parâmetro pequeno, proporcional ao momento torçor T_1 ;
 F_{rp} - parâmetro expresso em termos de r, p (ordem dos modos) e de v ;
 v - auto-valor associado às vibrações torcionais da viga.

Para o caso particular de viga bi-engastada à flexão e engastada à torção os termos das equações (1.1) e (1.2) são dados por:

$$\omega_{1r} = \left[\frac{EI_1}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^4 - \frac{p}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.3)$$

$$\omega_{2r} = \left[\frac{EI_2}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^4 - \frac{p}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.4)$$

$$\epsilon = \frac{8 \pi^2 T_1}{mL^3}, \quad (1.5)$$

$$F_{rp} = (\sec vL - 1) \left[\frac{p^2 (vL)^4 - 12\pi^2 p^2 (p^2 + r^2) (vL)^2 + 16\pi^4 p^4 (p^2 - r^2)}{(vL)^4 - 8\pi^2 (p^2 + r^2) (vL)^2 + 16\pi^4 (p^2 - r^2)^2} \right], \quad (1.6)$$

onde,

$$v = \frac{\Omega}{c} \quad (1.7)$$

$$c = \sqrt{\frac{kG}{\rho}} \quad (1.8)$$

k - coeficiente dependente da forma da secção (ver TIMOSHENKO & GOODIER⁽⁶⁾, pág. 277, e apêndice VII).

m - massa por unidade comprimento.

ρ - massa específica do material da viga.

A solução trivial do sistema de equações

(1.1) e (1.2) é instável se Ω se situa na vizinhança de certas frequências críticas, dadas por:

$$\Omega_0 = \frac{|\omega_{1r} \pm \omega_{2p}|}{s}, \quad r \neq p \quad (1.9)$$

$$s = 1, 2, \dots,$$

quando se diz ocorrer ressonância paramétrica combinatória, também denominada ressonância paramétrica de segunda espécie.

Logo as regiões de instabilidade elastodinâmica (RIED) desta viga no plano ϵ vs. Ω são delimitadas pelas frequências de ressonância combinatória, sendo:

Ω_{RO} - valor para $\epsilon = 0$.

Ω_{RE} - valores que delimitam as regiões de instabilidade da viga à esquerda.

Ω_{RD} - idem acima, à direita.

Assim tem-se, (ver figura (1.2)):

$$\Omega_{RO} = \omega_{1r} + \omega_{2p} \quad \text{se} \quad F_{rp} \cdot F_{pr} > 0 \quad (1.10)$$

ou

$$\Omega_{RO} = |\omega_{1r} - \omega_{2p}| \quad \text{se} \quad F_{rp} \cdot F_{pr} < 0 \quad (1.11)$$

e

$$\Omega_{RE} = \Omega_{RO} - \epsilon \Lambda, \quad (1.12)$$

$$\Omega_{RD} = \Omega_{RO} + \epsilon \Lambda, \quad (1.13)$$

onde:

$$\Lambda = \left[\frac{F_{rp}(\nu L) \cdot F_{pr}(\nu L)}{4\omega_{1r} \cdot \omega_{2p}} \right]^{1/2} \quad (1.14)$$

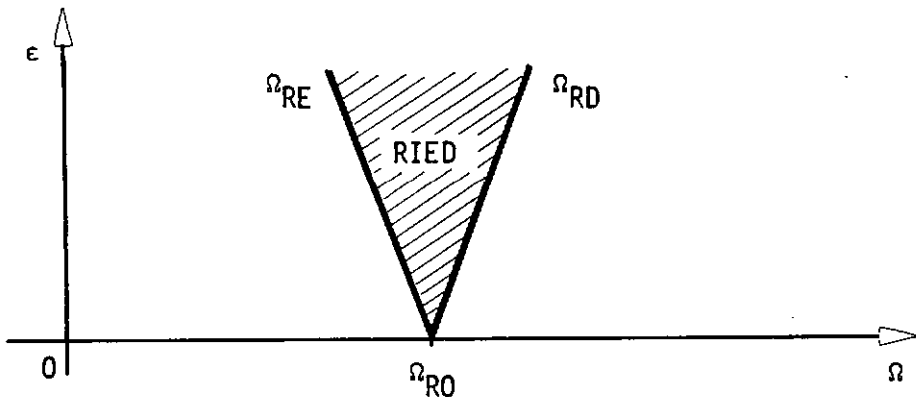


Fig. 1.2

De (1.7), (1.10) , (1.11)

$$vL = \frac{\Omega_{R0}}{c} L = |\omega_{1r} \pm \omega_{2p}| \frac{L}{c} \quad (1.15)$$

A análise desenvolvida teoricamente sô é vâlida para valores pequenos do parâmetro ϵ ($0 < \epsilon \ll 1$), ou seja, para pequenos valores do momento torçor axial.

Pode-se concluir ainda que, da expressão de F_{rp} dada por (1.6), quando vL tende aos valores $\left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right]$, $n=1,2,\dots$, F_{rp} cresce sem limites. Nestes casos as regiões de instabilidade são ampliadas.

Assim, de (1.15) tem-se:

$$\frac{|\omega_{1r} \pm \omega_{2p}|}{c} L = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (1.16)$$

Então, como pode ser visto na expressão anterior, os comprimentos que se situam nos entornos de L fornecem regiões de instabilidade amplas. Estes comprimentos, denominados comprimentos críticos e representados por L_{CR} , são dados portanto por:

$$L_{CR} = \frac{(n - 0,5) \pi c}{\Omega_{RO}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

sendo:

$$\Omega_{RO} = \omega_{1r} + \omega_{2p} \quad \text{para} \quad F_{rp} \cdot F_{pr} > 0$$

e

$$\Omega_{RO} = |\omega_{1r} - \omega_{2p}| \quad \text{para} \quad F_{rp} \cdot F_{pr} < 0$$

* * *

Esta tese é uma verificação experimental de um dos modelos teóricos analisados por LARANGEIRA. Especificamente são levantados, através de um modelo experimental, as regiões de instabilidade elastodinâmicas de uma barra bi-engastada à flexão e engastada à torção, comprimida e sob excitação torcional oscilante.

CAPÍTULO II

MONTAGEM EXPERIMENTAL

O programa para computador IBM 1130/32K desenvolvido por LARANGEIRA ⁽⁵⁾, modificado afim de reduzir o tempo de computação, foi utilizado para a determinação das dimensões e proporções físicas da viga a ser usada na experiência. Diversas tentativas foram necessárias para se chegar às dimensões compatíveis com a capacidade de usinagem da oficina mecânica da COPPE, com as dimensões da mesa de testes do laboratório de vibrações na qual seria montada a experiência, e com as limitações impostas pela instrumentação.

2.1 - VIGA DE TESTES

Os requisitos para se obter uma viga com ressonância paramétrica nas faixas de frequências compatíveis com a instrumentação são: massa por unidade de comprimento grande, comprimento da viga elevado, e secção transversal com momentos principais de inércia diferentes.

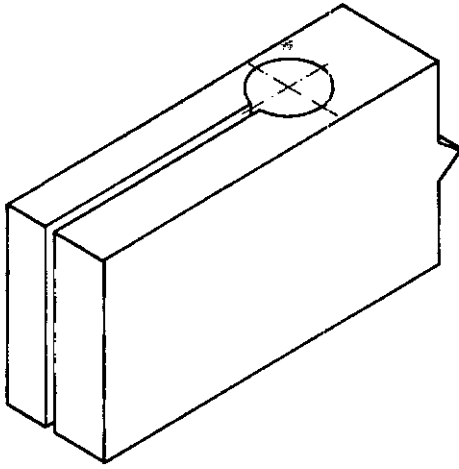
Devido a facilidade de construção foi escolhida uma secção transversal da forma retangular, e tomou-se por ponto de partida uma régua de aço inoxidável com as dimensões de 1 metro de comprimento, 40mm de largura e 1,3mm de espessura, a qual seria usinada até às dimen-

sões determinadas pelo resultado da programação. Afim de se manter as qualidades de alinhamento, a largura da régua foi reduzida por fresagem e retificação às dimensões desejadas ($L = 997\text{mm}$, $b = 1,30\text{mm}$).

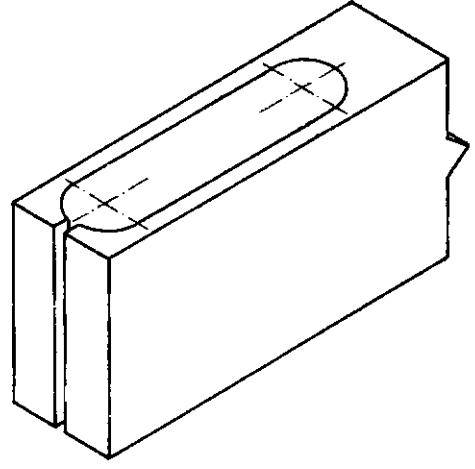
As condições de vinculação da viga que mais se adaptavam as limitações da experiência foram bi-engastamento à flexão e engastamento à torção. O engastamento à flexão e à torção na extremidade fixa da viga foi feito por meio da pinça mostrada na figura (2.1). O sistema foi idealizado desta forma de modo a possibilitar mudança de vinculação de engaste à flexão para articulação simples através da pinça, mostrada no detalhe (b) da figura (2.1). A vinculação na extremidade móvel da viga, engastamento à flexão e liberdade à torção, foi realizado por meio de 2 rolamentos de esferas autocompensadores, conforme a figura (2.2). A transição da viga retangular para o eixo circular suscitou problemas de alinhamento e de acréscimo de massa.

A solução para a montagem, com as melhores condições de alinhamento, foi adaptar a viga à ranhura do eixo, no local da experiência, após prévio alinhamento do conjunto e a devida fixação das partes com adesivo epoxi.

Tendo em mente o objetivo de não acrescentar massas significativas à viga, o rolamento de esferas autocompensador escolhido foi o menor possível, de fabricação SKF, nº 135, com as dimensões principais dadas na figura (2.2), e ainda, acoplou-se de um lado da viga, na sua extensão, um eixo cilíndrico com o diâmetro D_1 igual ao diâmetro interno do rolamento e com a tolerância devida especificada pelo fabricante (h5), possuindo ainda, o eixo, na extremidade presa a viga, um

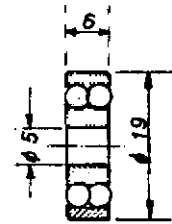
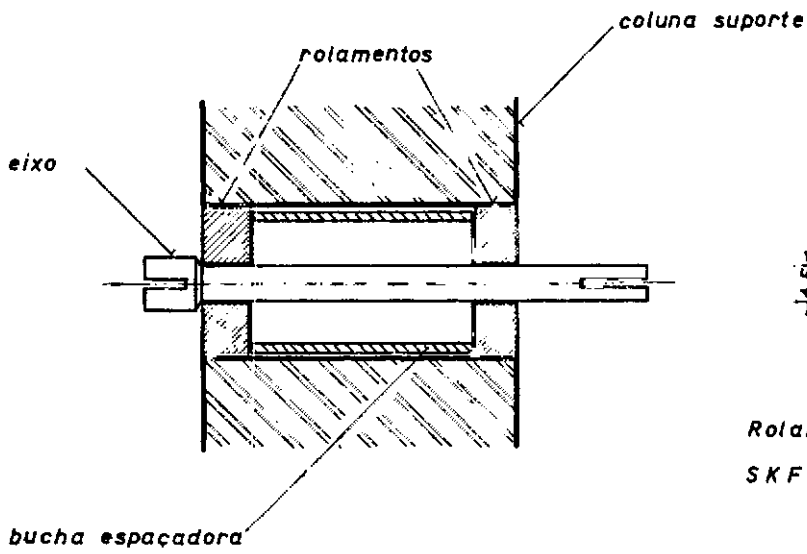


PINÇA DE ENGASTE



PINÇA DE ARTICULAÇÃO

FIG. 2.1



Rolamento autocompensador
SKF - n: 135

FIG. 2.2

aumento de diâmetro para proteger deslocamentos longitudinais da viga quando da compressão da mesma, e, na extremidade oposta, um braço de alavanca, de pequena massa, para permitir a excitação torcional.

A ligação dos vînculos da viga à mesa de testes foi feita através de 2 colunas com bases, fotos (1) e (2), maciças de grande rigidez.

A mesa de testes consiste de um banco ótico pesando aproximadamente 200Kg, isolado elasticamente, como mostram as fotos (1) e (2).

2.2 - DISPOSITIVO DE COMPRESSÃO

Afim de produzir uma compressão axial na viga, o que influencia na ressonância paramétrica, foi feita a montagem mostrada na figura (2.3). A viga (3) é comprimida pelo deslizamento da pinça (4) ao longo do sulco da coluna (2), deslizamento este provocado pela força P originada da flexão da lâmina (5) causada pelo deslocamento do micrômetro (8); a outra extremidade da lâmina é presa no dispositivo (6) que simula apoio a flexão. O sistema pode ser visto ainda na foto (6).

O cálculo da força de compressão P , função do deslocamento flexional δ_1 da lâmina é apresentado no apêndice I, página 75.

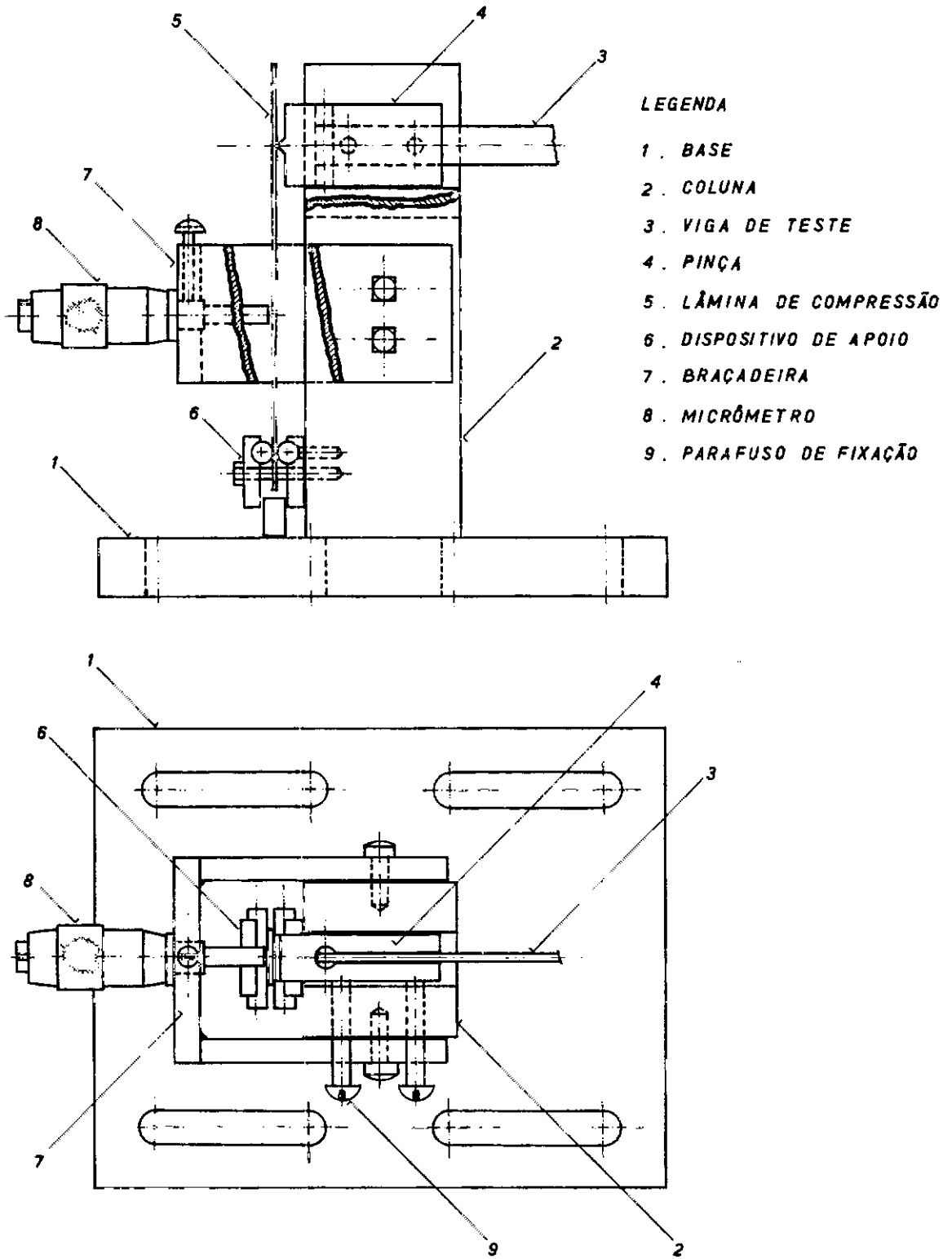


FIG. 2.3

2.3 - SISTEMA DE EXCITAÇÃO

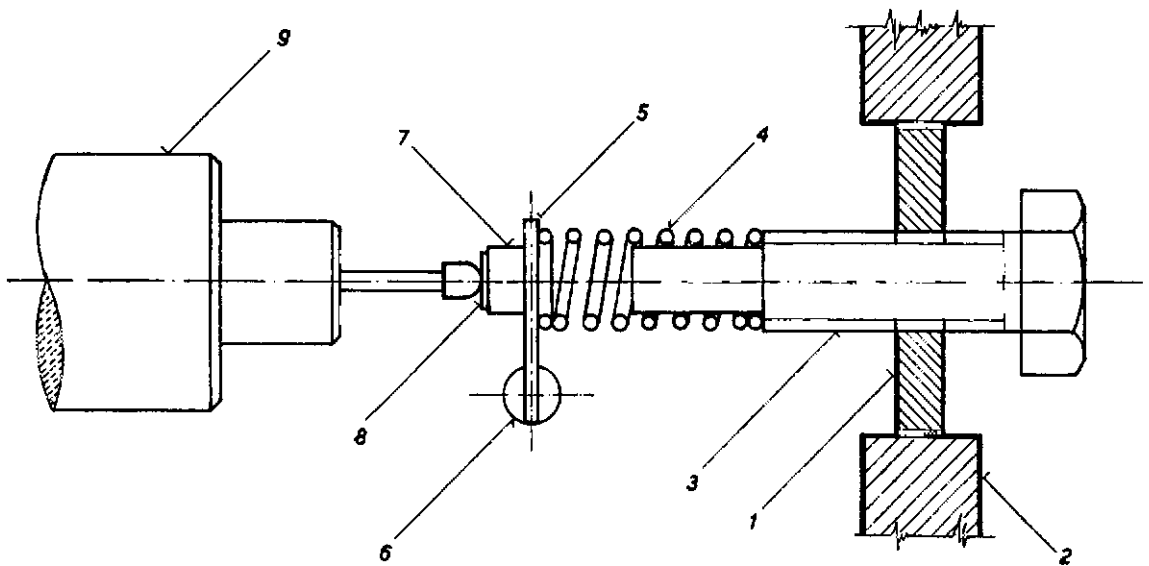
2.3.1 - TRANSDUTOR ELETRODINÂMICO

Para excitação da viga a torção foi utilizado um Transdutor Eletrodinâmico, marca Philips, modelo PR9261. As vantagens principais deste excitador são a possibilidade de controlar a força de excitação, a capacidade de geração de força nos níveis necessários à experiência e a massa da parte móvel de somente 10 gramas.

O transdutor Philips atua por contato e, para tal, há necessidade de se exercer uma força estática de 850 gramas. O dispositivo esquematizado na figura (2.4), e mostrado na foto (5), foi usado para compensar esta força estática, permitindo ainda o controle sobre o momento torçor estático na viga. Consiste basicamente de uma contra-mola com um batente, ajustável por meio de um parafuso de rosca fina, com a extremidade torneada para se ajustar à contra-mola.

O único efeito desta contra-mola sobre o sistema foi o aumento da rigidez geral da suspensão do excitador. As frequências naturais do sistema excitador - contra-mola - suportes foram determinadas experimentalmente, e o assunto será discutido com mais detalhes posteriormente.

Embora o controle da força de excitação produzida por este transdutor possa ser feito pela sensibilidade do excitador fornecida pelo fabricante (2,84 gramas / miliAmperes) usou-se, como elemento indicador da força gerada, um disco de cerâmica piezo-elétrica, interposto



LEGENDA

- 1 PLACA COM ROSCA
- 2 ENGASTE
- 3 PARAFUSO
- 4 CONTRA-MOLA
- 5 ALAVANCA
- 6 EIXO DA VIGA
- 7 TRANSDUTOR PIEZOELETRICO
- 8 DISCO DE AÇO
- 9 EXCITADOR

FIG. 2.4

entre a ponta do excitador Philips e o braço de alavança do eixo da viga (fig. 2.4). Um disco de metal de pequena espessura (0,4 mm), intermediário à ponta do excitador e ao transdutor cerâmico, distribui de uma maneira mais uniforme a força excitadora.

A cerâmica piezo-elétrica usada foi um disco com diâmetro de 1/2" e espessura de 1/4" , marca Clevite, tipo PZT5, escolhido por sua alta sensibilidade e resposta plana em frequência na faixa utilizada no ensaio, 50 a 5000hz, muito abaixo de sua 1ª frequência natural (150 KHz). Os cálculos de determinação de sua sensibilidade dinâmica são apresentados no apêndice III. A razão de se utilizar este transdutor cerâmico foi a sua compatibilidade com o Controlador Automático de Excitação de Vibração, marca B&K, tipo 1025. A voltagem, gerada pela força dinâmica através da cerâmica, foi usada na realimentação do Controlador Automático, possibilitando assim, uma varredura contínua de frequências com a manutenção de uma força dinâmica de excitação em nível constante.

A captação da força pelo disco piezo-elétrico, no ponto de excitação da viga, assegura que realmente se está mantendo constante a força de excitação durante a varredura em frequência, independentemente da variação de impedância mecânica do excitador.

Maiores detalhes da instrumentação são fornecidos no capítulo IV , e a conversão da sensibilidade dinâmica para adaptação ao controlador é apresentada no apêndice IV.

2.3.2 - TRANSDUTOR MAGNÉTICO

Inicialmente, tendo em mente o objetivo de produzir uma excitação com o mínimo de acréscimo de massas, cogitou-se da utilização de um Transdutor Magnético, marca B&K, tipo MM 0002, como excitador.

Tal solução não pode ser utilizada, no entanto, devido a pequena força de excitação disponível, além de sua dependência da distância do entreferro, que apresentava grandes variações causadas pela flexibilidade do sistema.

Outra dificuldade foi de converter diretamente em voltagem, e manter constante por realimentação do oscilador, a força de excitação durante uma varredura em frequência.

CAPÍTULO III

MÉTODOS DE LEITURA

Diversos métodos de leitura foram testados para a determinação das frequências de ressonância, e, principalmente, para a discriminação entre ressonâncias torcionais e as ressonâncias paramétricas de flexão. A preocupação maior, na escolha nos diversos métodos, foi a não inclusão de massas consideráveis estranhas ao sistema.

3.1 - ILUMINAÇÃO ESTROBOSCÓPICA

O primeiro método usado consistiu em iluminar a viga com uma Lâmpada Estroboscópica, marca General Radio, modelo 1531, e medir a deflexão desta por meio de um Catetômetro especial para medida de deflexões de modelo reduzido.

Foi nitidamente observável a primeira ressonância paramétrica em torno de 300 hz, com a deflexão de 0,48mm, correspondente a um momento torçor dinâmico de $5,4 \times 10^{-4}$ mKgf (valor do parâmetro ϵ aproximadamente igual a 3 s^{-2}).

A frequência limite superior do estroboscópio, aproximadamente 417 cps., e a redução das deflexões com o aumento da frequência, impossibilitaram a observação das ressonâncias superiores.

3.2 - TRANSDUTOR CAPACITIVO

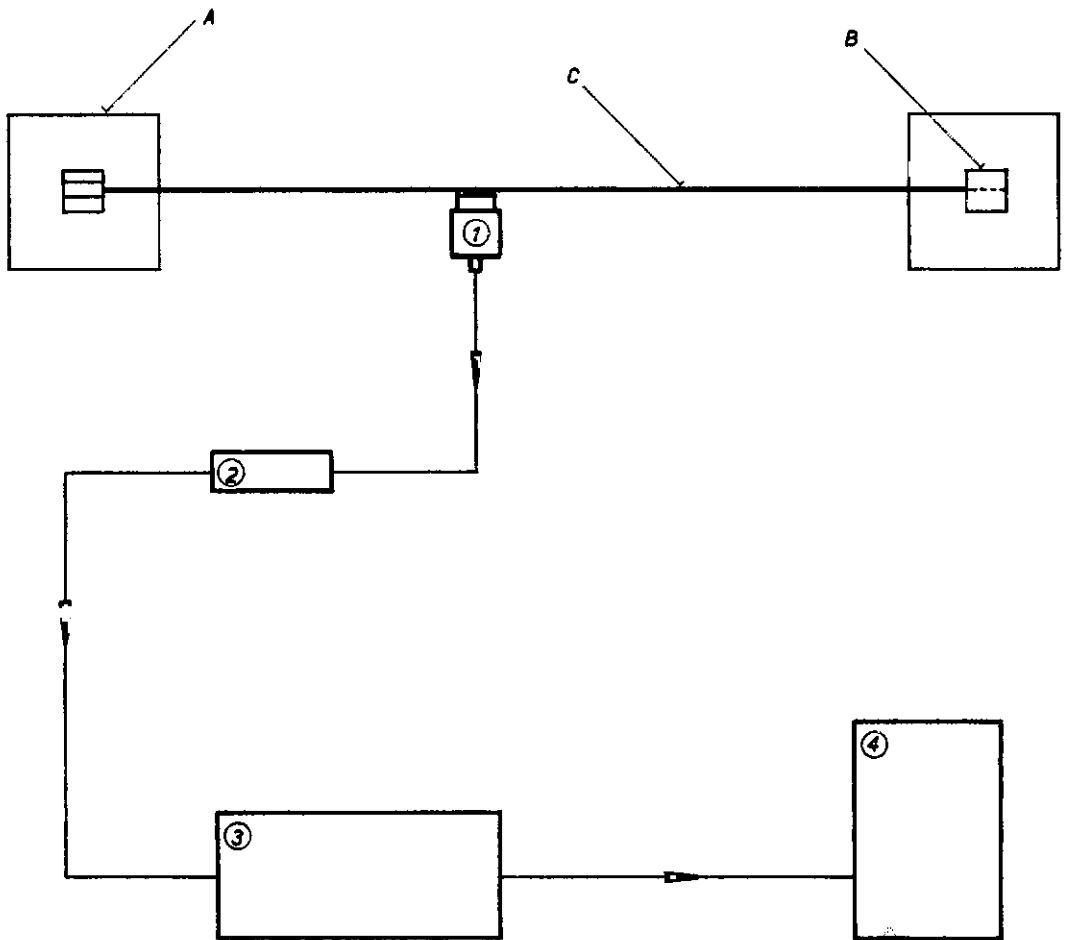
O Transdutor Capacitivo, marca B&K, tipo MM0004, foi utilizado, conforme o diagrama da figura (3.1). Os resultados obtidos por este método não foram conclusivos, apesar da alta sensibilidade do transdutor usado, por não possibilitar diferenciação entre ressonâncias torcionais e ressonâncias paramétricas flexionais.

3.3 - SISTEMA ÓTICO

Este sistema, esquematizado na figura (3.2), tem como elementos principais a fonte de luz concentrada, duas lentes convergentes, uma fresta ajustável e um anteparo. Como fonte de luz foram usados, sucessivamente, um projetor de slides projetando a imagem de uma placa com um furo de 1mm de diâmetro, uma Lâmpada Estroboscópica, e finalmente uma lâmpada de vapor de mercúrio.

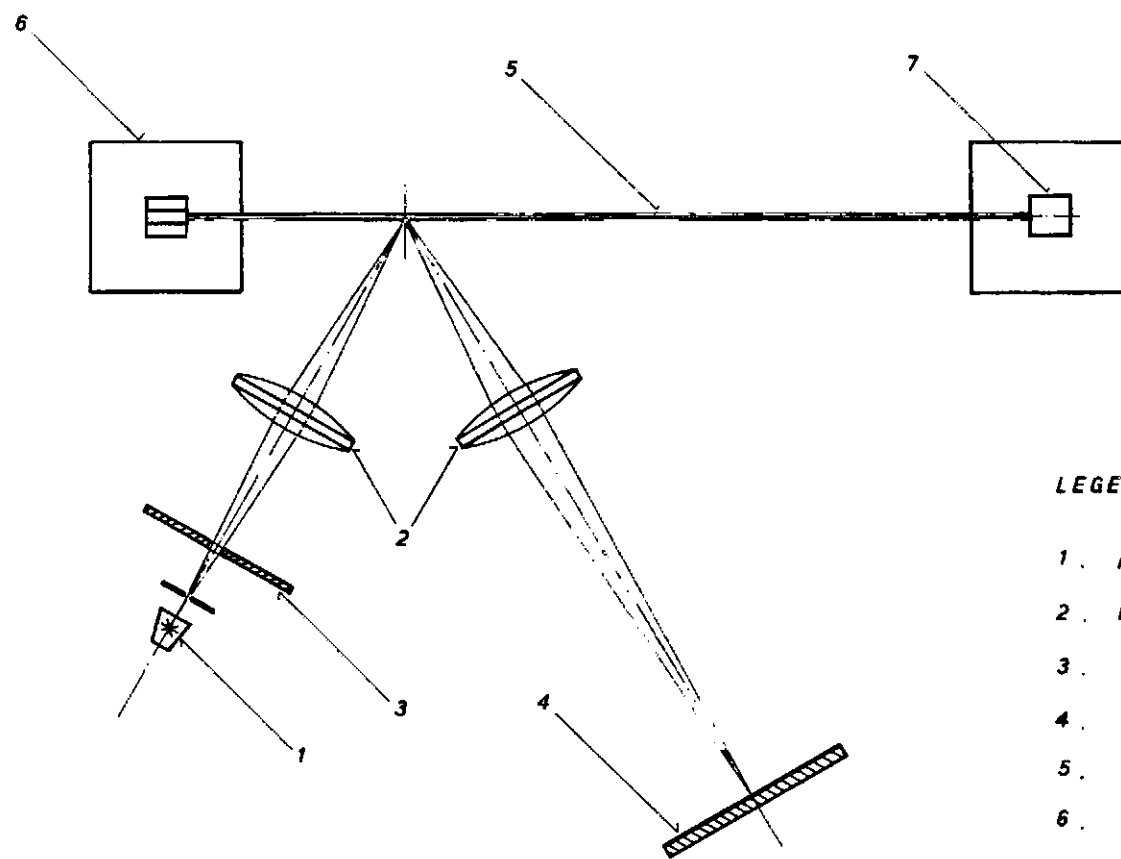
Na figura (3.2) a imagem do ponto luminoso ou fresta (3) é refletida na viga e focalizada no anteparo (4). A um deslocamento da viga em baixa frequência corresponde um deslocamento ampliado da imagem projetada; deslocamentos em frequências mais altas produzem uma alongação da imagem do ponto luminoso.

Pode-se observar com este sistema uma perfeita distinção entre as vibrações ressonantes flexionais e torcionais, e sempre que a frequência de excitação se aproximava de uma ressonância paramétrica o ponto luminoso refletido no anteparo indicava inicialmente uma tor-

**LEGENDA**

- A** BASE
- B** SUPORTE
- C** VIGA DE TESTE
- ① TRANSDUTOR CAPACITIVO
- ② CASADOR DE IMPEDÂNCIA
- ③ AMPLIFICADOR MEDIDOR
- ④ OSCILOSCÓPIO

FIG. 3.1



LEGENDA

- 1. FONTE DE LUZ
- 2. LENTES CONVERGENTES
- 3. FRESTA AJUSTÁVEL
- 4. ANTEPARO
- 5. VIGA ESPELHADA
- 6. BASE
- 7. SUPORTE

FIG. 3.2

ção (deslocamento vertical do ponto luminoso), transformando-se gradativamente em flexão (deslocamento horizontal), como mostra a figura (3.3).

Este fenômeno pôde ser visto com nitidez na primeira ressonância paramétrica (≈ 300 hz), porém na segunda ressonância, quase não se notou a diferença entre flexão e torção. Isto devido à redução de amplitude com elevação da frequência, tornando piores as condições de observação.

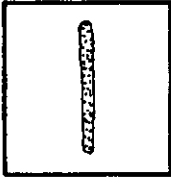
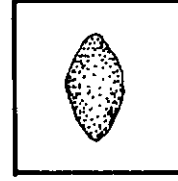
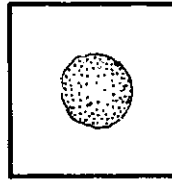
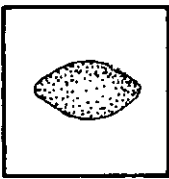
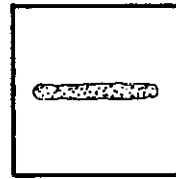
Com o uso da lâmpada estroboscópica houve uma pequena melhora, mas ainda insuficiente para as frequências mais altas, devido à limitação de frequência de disparo do estroboscópio. A lâmpada de vapor de mercúrio não trouxe outros resultados, apenas tornando mais nítida a imagem em frequências baixas, menores que 500 hz.

Posteriormente, com uma diminuição da amplitude de excitação torcional, foi possível reduzir a torção que precedia a flexão em ressonâncias paramétricas.

Este processo ótico embora só desse bons resultados em frequências relativamente baixas para a experiência, foi o que proporcionou a visualização mais perfeita do fenômeno de ressonâncias paramétricas. Serviu como base de aferição para o método descrito a seguir no item (3.4), que provou ser aplicável também às frequências mais altas.

3.4 - TRANSDUTOR DE CRISTAL DE QUARTZO

Uma cápsula de toca discos de cristal de

*TORÇÃO PURA**TORÇÃO COM FLEXÃO**TORÇÃO E FLEXÃO**FLEXÃO COM TORÇÃO**FLEXÃO PURA**FIG. 3.3*

quartzo piezo-elétrico, com uma agulha de costura em contato com a viga, foi o método de medição que apresentou melhores resultados. Um esquema deste sistema é mostrado na figura (3.4).

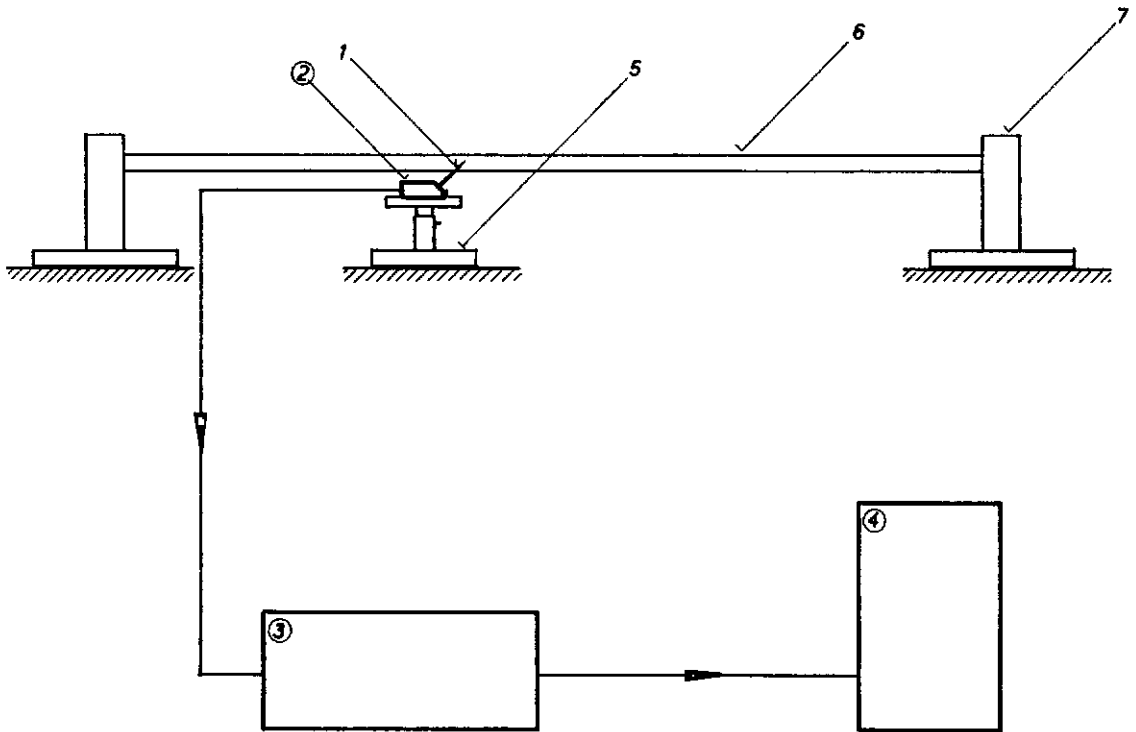
A figura (3.5) mostra em detalhes o suporte da cápsula piezo-elétrica. Como se pode ver no desenho, o dispositivo permite variação da altura da cápsula, possibilitando medições na linha média e na extremidade da viga.

A agulha em contato com a viga recebe o sinal de vibração da mesma transmitindo-o ao cristal, sendo amplificado em seguida, e mostrado em osciloscópio.

Nas ressonâncias à torção as amplitudes de deslocamento medidas na linha média da face mais larga da barra apresentam valores desprezíveis, enquanto que próximo às bordas desta face ocorre o máximo de amplitude de vibração.

Nas vibrações fletoras a amplitude é constante ao longo da dimensão maior de uma secção transversal. Assim, comparando - se leituras de deflexão na linha média e na borda da face maior de uma secção transversal, pode-se distinguir se uma ressonância é de caráter torcional ou flexional.

Os quatro primeiros modos de vibração à flexão da viga foram determinados teoricamente (ver, por exemplo, HARRIS E CREDE⁽¹⁶⁾), e são mostrados na figura (3.6). Em vista disto as secções transversais escolhidas para tomada de medidas foram de 183mm e 500mm a partir de um dos apoios, evitando assim que as medidas fossem feitas em um nó de vi-



LEGENDA

- 1 . AGULHA
- ② TRANSDUTOR DE QUARTZO
- ③ AMPLIFICADOR
- ④ OSCILOSCÓPIO
- 5 . BASE SUPORTE AJUSTÁVEL
- 6 . VIGA
- 7 . COLUNA

FIG. 3.4

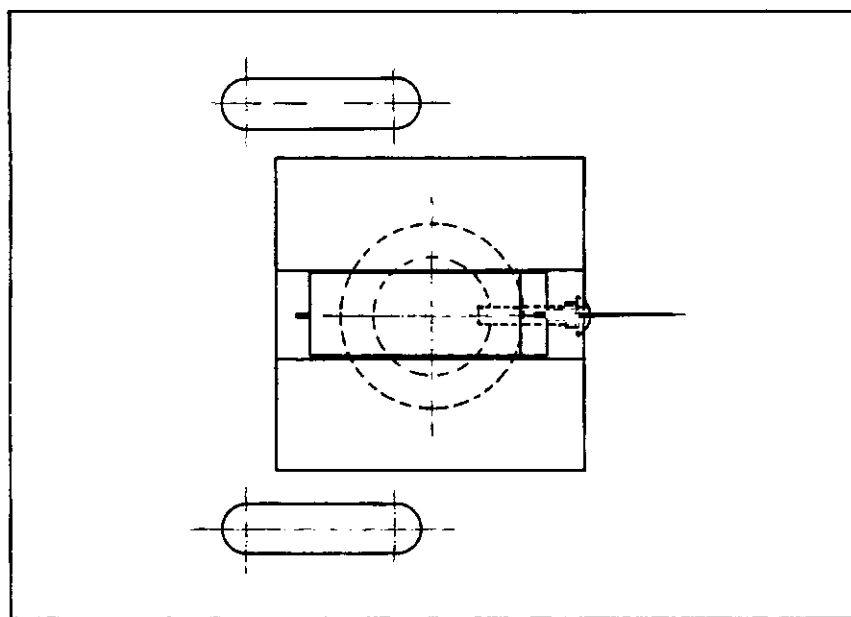
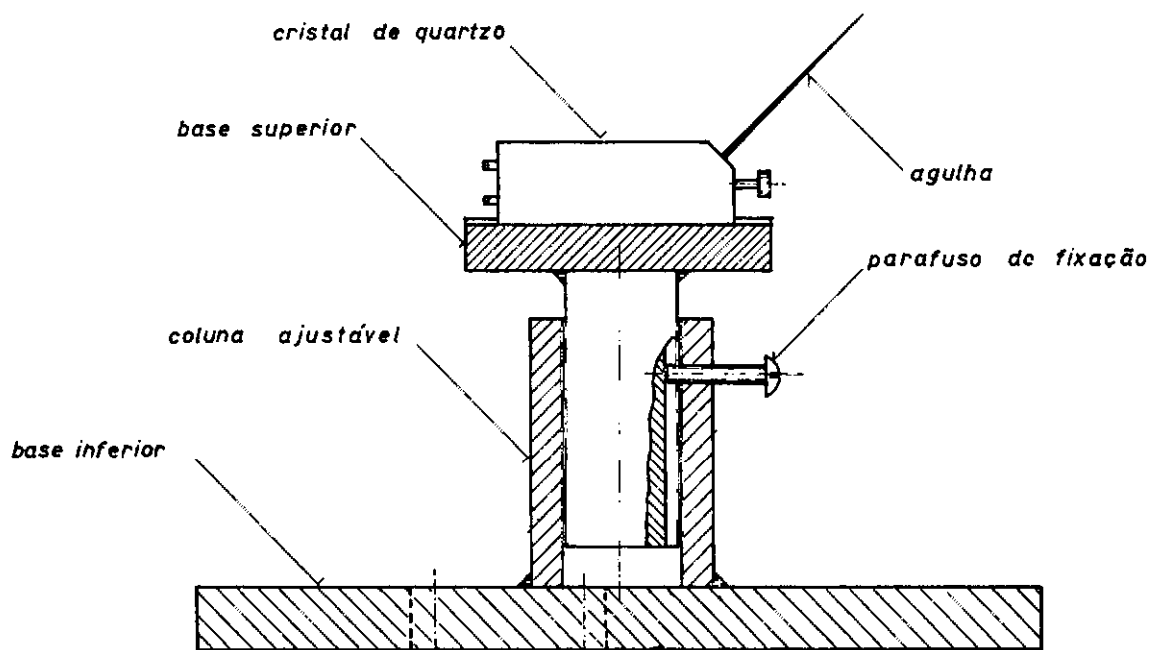
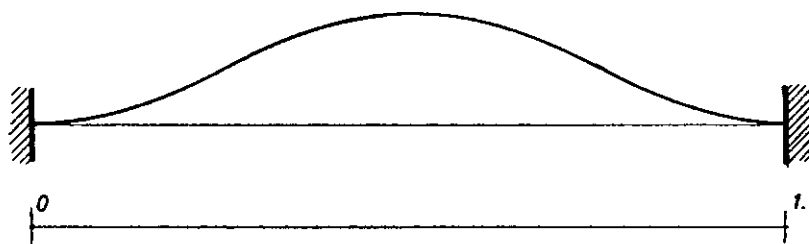
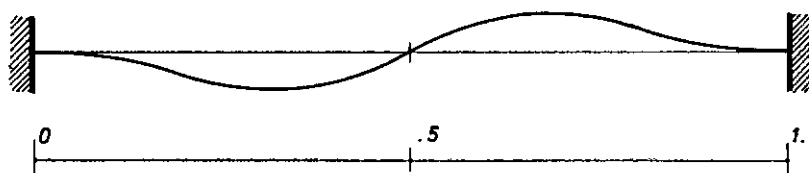


FIG. 3.5

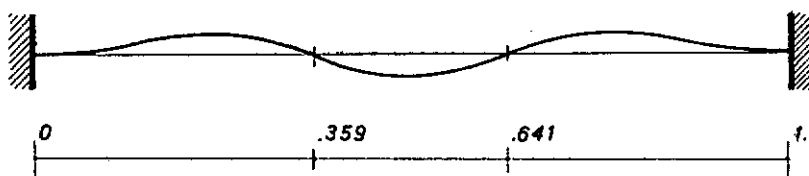
1: MODO :



2: MODO :



3: MODO :



4: MODO :

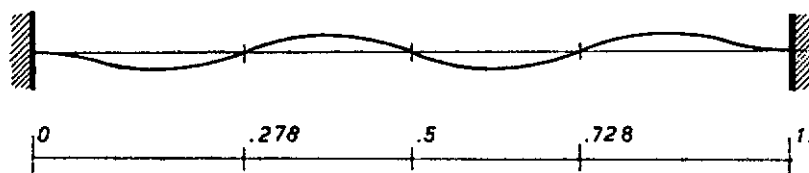


FIG. 3.6

bração flexional.

Os nós de vibração torcional não foram pesquisados por não haver interesse na determinação destas vibrações.

CAPÍTULO IV

EXPERIÊNCIAS

4.1 - APARELHAGEM USADA

A aparelhagem utilizada no ensaio experimental é mostrada na foto (3), e os diagramas de blocos correspondentes são apresentados nas figuras (4.1) e (4.2).

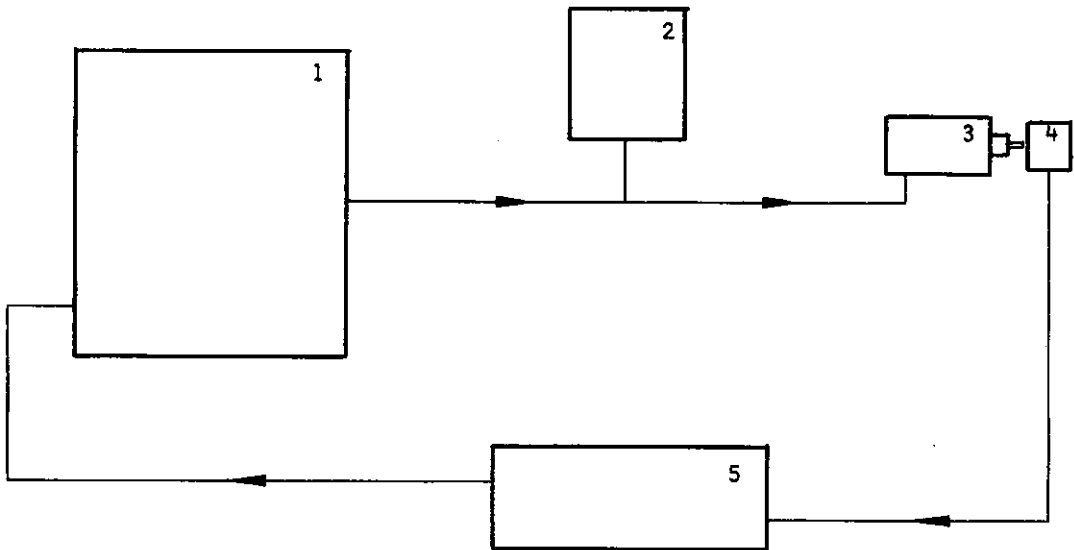
Com a finalidade de facilitar a análise e comparação dos resultados, foi estabelecida uma sistemática experimental, mantida durante todo o transcorrer dos ensaios. Desta maneira ficaria assegurada uma coerência interna no método experimental.

4.2 - CALIBRAÇÃO DO SISTEMA

Inicialmente foi feita a calibração da aparelhagem eletrônica do circuito de excitação, de acordo com a sensibilidade do transdutor piezo-elétrico de força usado na realimentação, sensibilidade esta determinada conforme exposto no apêndice III.

A calibração do sistema mecânico de excitação foi feita com o propósito de se determinar as frequências de ressonâncias do conjunto excitador e sua base, transdutor piezo-elétrico, contra-mola e suportes e ainda alavanca de torção sem a viga. Os gráficos-resposta resultan-

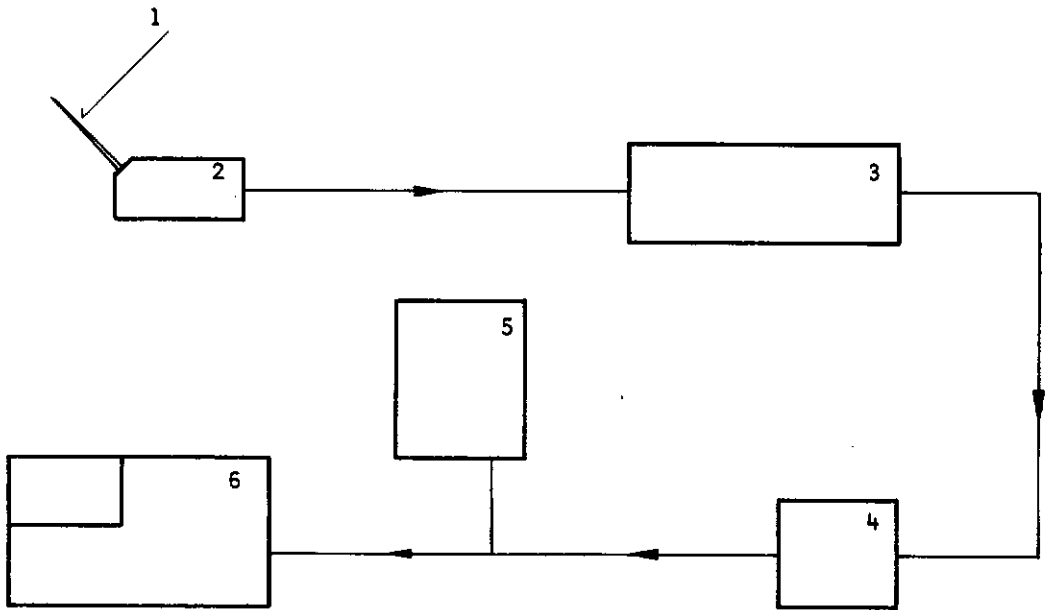
CIRCUITO DE EXCITAÇÃO



- 1 - CONTROLADOR AUTOMÁTICO DE EXCITAÇÃO DE VIBRAÇÃO
MARCA B&K, Modelo 1025
- 2 - VOLTÍMETRO, MARCA Hewlett-Packard, Modelo 400L
- 3 - EXCITADOR ELETRODINÂMICO, MARCA Philips, Modelo PR9261
- 4 - TRANSDUTOR PIEZO-ELÉTRICO, MARCA Clevite, tipo PZT5,
disco cerâmico.
- 5 - PRÉ-AMPLIFICADOR DE ACELERÔMETRO, MARCA B&K, Modelo 2622.

Fig. 4.1

CIRCUITO DE MEDIÇÃO



- 1 - AGULHA DE COSTURA
- 2 - TRANSDUTOR DE CRISTAL PIEZO-ELÉTRICO
- 3 - MEDIDOR AMPLIFICADOR, MARCA B&K, Modelo 2606
- 4 - FILTRO, MARCA Krohn-Hite, Modelo 3202
- 5 - OSCILOSCÓPIO, MARCA Tektronix, Modelo 564 B,
com os seguintes "plug-in":
 - AMPLIFICADOR DE TRAÇO, Modelo 3A6
 - BASE DE TEMPO, Modelo 3B3
- 6 - REGISTRADOR DE NÍVEL, MARCA B&K, Modelo 2305.

Fig. 4.2

tes (SIJ) são apresentados na figura (4.3.a).

Outra calibração se fez necessária a seguir: o levantamento das frequências naturais de vibração flexional da viga, com a finalidade de se estimar as propriedades elásticas dos engastamentos à flexão. Isto foi feito excitando-se a viga no ponto distante 60mm do engaste e captando-se as vibrações com a agulha e cristal em um ponto à 814mm do mesmo engaste (Gráficos FNVFIJ e FNIJ , figura 4.3.b e 4.3.c), Nesta medição foram usadas duas sensibilidades diferentes no registrador de nível.

4.3 - OBTENÇÃO DOS GRÁFICOS RESPOSTA

A seguir ajustou-se a altura da cápsula de medição para que a agulha tocasse a viga em sua linha média nas posições dos ventres dos modos de vibração flexional, conforme explicado no parágrafo (3.4) do capítulo anterior e mostrado na foto (7).

A força axial de compressão da barra é dada pela ajustagem do micrômetro (8), figura (2.3), de acordo com o apêndice I, e uma vez atingido o valor desejado da força são fixados os parafusos (9) da coluna suporte.

A ajustagem do controlador automático de excitação consiste na escolha das frequências limites inferior e superior de varredura, da velocidade de varredura e da calibração do sistema de realimentação para manutenção da força constante a ser mantida no ponto de excitação da viga.

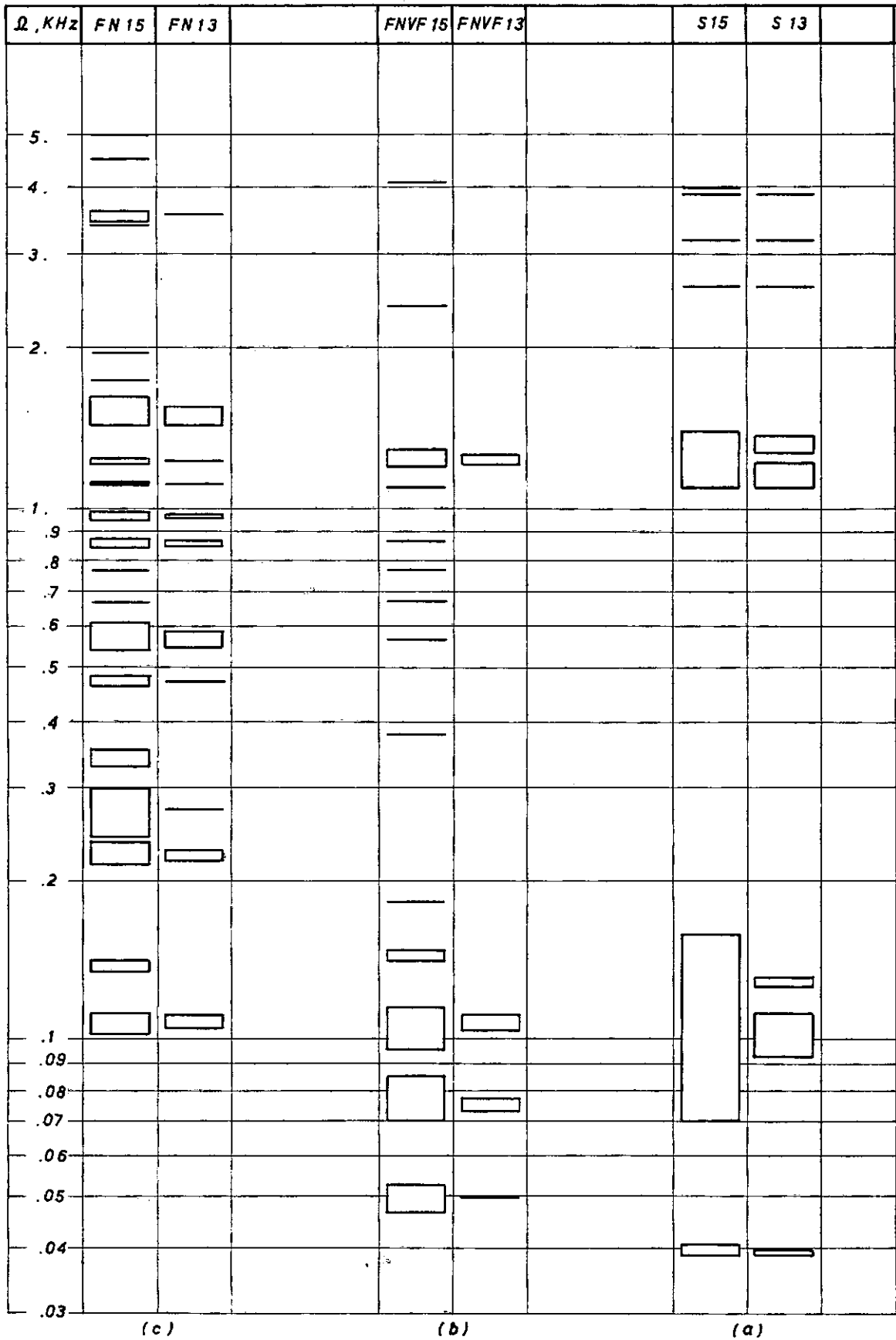


FIG. 4.3 - FAIXAS DE RESSONÂNCIA SISTEMA DE EXCITAÇÃO E BARRA EXCITADA À FLEXÃO.

No circuito de medição introduziu-se um filtro eletrônico para a eliminação de ruídos estranhos à experiência. Foi feita a ajustagem de ganho do amplificador de medida.

Iniciando-se o ensaio propriamente dito, ligou-se, simultaneamente, a varredura de frequência no controlador automático de vibração e o deslocamento do papel no gravador de nível. O registro da correspondência da posição da pena no papel e a frequência de excitação foi feita manualmente usando um marcador de eventos no registrador, por observação visual da escala de frequências do oscilador. Desta forma a frequência de excitação foi variada de 100 a 5000 hz, obtendo-se assim o primeiro gráfico de resposta em experiência.

Após o registro das respostas do sistema para diversas forças de excitação, modificou-se o valor da força de compressão na viga e foram repetidos os ensaios anteriores até se obter todos os gráficos-resposta medidos com a agulha na posição em questão. (Gráficos FIJ da tabela 4.1).

A segunda fase da experiência consistiu em posicionar a agulha da cápsula de cristal na borda da face maior da secção transversal da viga e refazer toda a marcha anterior. (Gráficos TIIJ, tabela 4.2).

Em outra fase da experiência repetiu-se algumas das experiências descritas com um valor diferente do momento torçor estático T_0 . (Gráficos FoIJ e ToIJ, tabela 4.5).

Concluindo o levantamento de gráficos respos-

ta repetiu-se algumas das condições anteriores e recebeu-se o sinal com a agulha num ponto situado no meio do vão entre os dois suportes de engaste . (Gráficos $F \cdot IJ$ e $T \cdot IJ$, tabela 4.6).

As tabelas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 apresentam a série de gráficos e as condições nas quais os mesmos foram obtidos.

TABELA 4.1 - GRÁFICOS RESPOSTA COM AGULHA NO MEIO

Força de compressão Kgf	Força de excitação $10^{-2}N$	Gráfico Resposta
0	1	F11
	2	F12
	3	F13
	5	F14
	7	F15
0,5	1	F21
	2	F22
	3	F23
	5	F24
	7	F25
1,0	1	F31
	2	F32
	3	F33
	5	F34
	7	F35

TABELA 4.2 - GRÁFICOS RESPOSTA COM AGULHA NA BORDA

Força de compressão Kgf	Força de excitação 10^{-2} N	Gráfico Resposta
0	1	T11
	2	T12
	3	T13
	5	T14
	7	T15
0,5	1	T21
	2	T22
	3	T23
	5	T24
	7	T25
1,0	1	T31
	2	T32
	3	T33
	5	T34
	7	T35

TABELA 4.3 - GRÁFICOS RESPOSTA DO SISTEMA EXCITADOR - CONTRA MOLA - SUPORTES

Força de compressão Kgf	Força de excitação 10^{-2} N	Gráfico Resposta
0	3	S13
0	7	S15

TABELA 4.4 - GRÁFICOS RESPOSTA DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO FLEXIONAL.

Força de compressão Kgf	Força de excitação 10 ⁻² N	Gráfico Resposta
0	3	FNVF13
0	7	FNVF15
0	3	FN13 *
0	7	FN15 *

(*) Sensibilidade de recepção diferente dos gráficos respostas FNVF13 e FNVF15.

TABELA 4.5 - GRÁFICOS RESPOSTA COM MOMENTO TORÇOR INICIAL ESTATICO DIFERENTE DE ZERO.

Força de compressão Kgf	Força de excitação 10 ⁻² N	Gráfico Resposta
0	3	Fo13
0	7	Fo15
0	3	To13
0	7	To15

TABELA 4.6 - GRÁFICOS RESPOSTA COM MEDIÇÃO NO MEIO DO VÃO DA VIGA.

Força de compressão [Kgf]	Força de excitação [10^{-2} N]	Gráfico Resposta
0	3	F*13
0	7	F*15
0	3	T*13
0	7	T*15

É apresentado a seguir, o relacionamento entre as tabelas anteriores e os gráficos correspondentes.

<u>TABELAS</u>	<u>GRÁFICOS DAS FIGURAS</u>	<u>PÁGINAS</u>
4.1	5.4, 5.5, 5.6	53, 54, 55
4.2	5.4, 5.5, 5.6	53, 54, 55
4.3	4.3.a	33
4.4	4.3.b e c	33
4.5	5.7	56
4.6	5.7	56

CAPÍTULO V

RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados teóricos e experimentais do problema em questão que culminam na determinação das regiões de instabilidade elastodinâmicas de uma viga, bi-engastada à flexão e engastada à torção, sujeita axialmente a uma força de compressão P e a um momento torçor periódico da forma $T = T_0 + T_1 \cos \Omega t$.

5.1 - RESULTADOS TEÓRICOS

Foram consideradas apenas as regiões de instabilidade correspondentes ao primeiro e segundo modos das vibrações flexionais da viga, determinadas com a utilização do programa para computador de LARANGEIRA⁽⁵⁾, conforme exposto no capítulo I.

Inicialmente determinou-se os comprimentos críticos, anteriormente pesquisados para a viga, através do Programa CCV1, apresentado nas páginas 41 a 44.

A seguir, com o valor do comprimento crítico, as regiões de instabilidade elastodinâmicas da viga foram estabelecidas pelo Programa RIED1, apresentado nas páginas 45 a 49.

Com os resultados deste último programa foi

possível traçar os gráficos ϵ vs. Ω das figuras (5.1), (5.2) e (5.3).

A correspondência entre os símbolos usados na programação é mostrada a seguir:

No Programa RIED1

L	-	HL
P_{crit}	-	PCRIT
r	-	I(e M ou N)
p	-	J(e N ou M)
v_L	-	ARGØ (I,J)
F_{rp}	-	F(I,J)
F_{pr}	-	F(J,I)
ϵ	-	EPSLN(MAG)
Λ	-	HLAND(I,J)
Ω_{RO}	-	VERT(I,J)
Ω_{RE}	-	ØMEL(I,J,MAG)
Ω_{RD}	-	ØMER(I,J,MAG)

No CCV1

L_{CR}	-	HLCR
L_k	-	HL
L_{k+1}	-	HL1
n	-	MULT
$(n-0,5)\pi$	-	RESØN
$y(L_{CR})$	-	Y(I,J)
$y'(L_{CR})$	-	DERY(I,J)

// JOB T 00FF 10FF

RENY15C9

(8001,2)

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0002
		1E34	0001

V2 M09 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*IDCS(2501 READER,1403 PRINTER)

*EXTENDED PRECISION

```

C *****
C PROGRAMA CCV1
C DETERMINACAO DOS COMPRIMENTOS CRITICOS DA VIGA
C BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO
C *****

      DIMENSION FNVT1(8),FNVT2(8),VERT(8,8),ARGO(8,8),A(8,8),
1      IB(8,8),C(8,8),D(8,8),E(8,8),F(8,8),Y(8,8),DERY(8,8)
      WRITE(5,1)
1      FORMAT(1H1,////,10X,'COMPRIMENTOS CRITICOS PARA A VIGA',
1          //,10X,'BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO')
      PY=3.141592
      PY2=2.*PY
C      DADOS PRINCIPAIS
      XH=0.00130
      XB=0.01200
      XK=0.310
      XE=21.E9
      XG=805.E7
      XRO=800.

      XI1=XB*XH**3/12.
      XI2=XH*XB**3/12.
      XM=XH*XB*XRO
      XC=SQRT(XK*XG/XRO)
      AK=1./XC
      BK=XE*XI1/XM
      CK=1./XM
      DK=XE*XI2/XM
      DO 50 JJ=1,2
      READ(8,2)P
2      FORMAT(F8.5)
      WRITE(5,3)XH,XB,P
3      FORMAT(///,10X,'***** SECCAO TRANSVERSAL *****',//,
1          10X,'XH=',F7.5,3X,'XB=',F7.5,3X,'P=',F8.5)
      DO 50 LONG=90,100
      HL=0.010*LONG
      PCRIT=(BK/CK)*(PY2/HL)**2
      IF(P-PCRIT)6,4,4
4      WRITE(5,5)PCRIT
5      FORMAT(//,10X,'PCRIT=',F10.4)
      GO TO 55
6      L=1

```



```

7 DO 50 J=1,2
  DO 50 I=1,2
    FNVT1(I)=SQRT(BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)
    FNVT2(J)=SQRT(DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)
    IF(L-1)8,8,9
8 VERT(I,J)=FNVT1(I)+FNVT2(J)
  GO TO 10
9 VERT(I,J)=ABS(FNVT1(I)-FNVT2(J))
10 M=I
  N=J
  K=0
  ARGO(I,J)=AK*VERT(I,J)*HL
12 A(M,N)=1./COS(ARGO(I,J))-1.
  B(M,N)=(N**2)*(ARGO(I,J))**4
  C(M,N)=12*PY**2*(N**2)*(N**2+M**2)*(ARGO(I,J))**2
  D(M,N)=16*PY**4*(N**4)*(N**2-M**2)
  E(M,N)=(ARGO(I,J))**4-8*PY**2*(N**2+M**2)*(ARGO(I,J))**2
  +16*PY**4*(N**2-M**2)**2
  F(M,N)=A(M,N)*(B(M,N)-C(M,N)+D(M,N))/E(M,N)
  K=K+1
  M=J
  N=I
  IF(K-2)12,14,14
14 IF(L-1)15,15,39
15 IF(F(I,J)*F(J,I))32,16,16
16 DO 32 MULT=1,2
26 FNVT1(I)=SQRT(BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)
  FNVT2(J)=SQRT(DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)
  VERT(I,J)=FNVT1(I)+FNVT2(J)
  ARGO(I,J)=AK*VERT(I,J)*HL
  RESON=(MULT-0.5)*PY
  Y(I,J)=ARGO(I,J)-RESON
  IF(ABS(Y(I,J))-0.1)28,28,32
28 DERY(I,J)=AK*(VERT(I,J)-
  1 ((2*BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)/FNVT1(I))-
  2 ((2*DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)/FNVT2(J)))
  HL1=HL-Y(I,J)/DERY(I,J)
  IF(ABS(HL-HL1)-0.0005)30,30,29
29 HL=HL1
  GO TO 26
30 HLCR=HL1
  WRITE(5,31)I,J,MULT,VERT(I,J),HLCR
31 FORMAT(/, 5X, 'I=', I1, 4X, 'J=', I1, 4X, 'MULT=', I1, 4X,
  1 'VERT(I,J)=', F9.2, 4X, 'HLCR=', F7.5)
32 CONTINUE
  IF(I-2)50,37,37
37 IF(J-2)50,38,38
38 L=2
  GO TO 7
39 IF(F(I,J)*F(J,I))40,40,50
40 DO 50 MULT=1,2
41 FNVT1(I)=SQRT(BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)
  FNVT2(J)=SQRT(DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)
  IF(FNVT2(J)-FNVT1(I))42,42,43
42 VERT(I,J)=FNVT1(I)-FNVT2(J)
  M=I
  N=J

```

```

      FREQ1=FNVT1(I)
      FREQ2=FNVT2(J)
      VK=BK
      WK=DK
      GO TO 44
43  VERT(I,J)=FNVT2(J)-FNVT1(I)
      M=J
      N=I
      FREQ1=FNVT2(J)
      FREQ2=FNVT1(I)
      VK=DK
      WK=BK
44  ARGO(I,J)=AK*VERT(I,J)*HL
      RESON=(MULT-0.5)*PY
      Y(I,J)=ARGO(I,J)-RESON
      IF(ABS(Y(I,J))-0.05)45,45,50
45  DERY(I,J)=AK*(VERT(I,J)-
1      ((2*VK*(PY2*M/HL)**4-CK*P*(PY2*M/HL)**2)/FREQ1)-
2      ((2*WK*(PY2*N/HL)**4-CK*P*(PY2*N/HL)**2)/FREQ2))
      HL1=HL-Y(I,J)/DERY(I,J)
      IF(ABS(HL-HL1)-0.0005)47,47,46
46  HL=HL1
      GO TO 41
47  HLCR=HL1
      WRITE(5,48)I,J,MULT,VERT(I,J),HLCR
48  FORMAT(/, 5X, 'I=',I1,4X, 'J=',I1,4X, 'MULT=',I1,4X,
1      'VERT(I,J)=',F9.2,4X, 'HLCR=',F9.7)
50  CONTINUE
55  CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 0 VARIABLES 2102 PROGRAM 1788

END OF COMPILATION

// XEQ

COMPRIMENTOS CRITICOS PARA A VIGA

BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

***** SECCAO TRANSVERSAL *****

XH=0.00130 XB=0.01200 P= 1.00000

I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)=	2802.51	HLCR=0.9908061
-----	-----	--------	------------	---------	----------------

I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)=	2801.53	HLCR=0.9908251
-----	-----	--------	------------	---------	----------------

I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)=	2800.68	HLCR=0.9908416
-----	-----	--------	------------	---------	----------------

I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)=	2800.42	HLCR=0.9908466
-----	-----	--------	------------	---------	----------------

I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)=	2799.35	HLCR=0.9908674
-----	-----	--------	------------	---------	----------------

***** SECCAO TRANSVERSAL *****

XH=0.00130 XB=0.01200 P= 2.00000

PCRIT= 1.9763

PAGE 1 RENY15C9

// JOB T 00FF 10FF

RENY15C9 (8001

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0002
		1E34	0001

V2 M09 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FORTRAN

*LIST SOURCE PROGRAM

*IOCS(2501 READER,1403 PRINTER)

*EXTENDED PRECISION

```

C *****
C PROGRAMA RIED1
C DETERMINACAO DAS REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
C BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO
C *****

```

```

DIMENSION FNVT1(2),FNVT2(2),VERT(8,8), ARGQ(8,8),
1A(8,8),B(8,8),C(8,8),D(8,8),E(8,8),F(8,8),HLAND(8,8),
2EPSLN(10),OMEL(4,4,10),OMER(4,4,10)
PY=3.141592
PY2=2*PY

```

C DADOS PRINCIPAIS

P=1.00

HL=0.9908416

XH=0.00130

XB=0.0120

XK=0.310

XE=21.E9

XG=805.E7

XRO=800.

XI1=XB*XH**3/12.

XI2=XH*XB**3/12.

XM=XH*XB*XRO

XC=SQRT(XK*XG/XRO)

AK=1./XC

BK=XE*XI1/XM

CK=1./XM

DK=XE*XI2/XM

DO 40 JJ=1,3

READ(8,6) P

6 FORMAT(F5.2)

PCRIT=(BK/CK)*(PY2/HL)**2

IF(P-PCRIT)4,2,2

2 WRITE(5,3)PCRIT

3 FORMAT(/,10X,'PCRIT=',F10.4)

GO TO 50

4 WRITE(5,5)HL,P

5 FORMAT(1H1,///,11X,'REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA',

1 1X,'VIGA',/,11X,'BI-ENGASTADA A FLEXAO -',

2 1X,'ENGASTADA A TORCAO',///,

3 11X,'HL=',F9.7,9X,'P=',F7.2)

```

L=1
7 DO 40 J=1,2
DO 40 I=1,2
FNV1(I)=SQRT(BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)
FNV2(J)=SQRT(DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)
IF(L-1)8,8,9
8 VERT(I,J)=FNV1(I)+FNV2(J)
GO TO 10
9 VERT(I,J)=ABS(FNV1(I)-FNV2(J))
10 M=I
N=J
K=0
ARGO(I,J)=AK*VERT(I,J)*HL
12 A(M,N)=1./COS(ARGO(I,J))-1.
B(M,N)=(N**2)*(ARGO(I,J))**4
C(M,N)=12*PY**2*(N**2)*(N**2+M**2)*(ARGO(I,J))**2
D(M,N)=16*PY**4*(N**4)*(N**2-M**2)
E(M,N)=(ARGO(I,J))**4-8*PY**2*(N**2+M**2)*(ARGO(I,J))**2
1 +16*PY**4*(N**2-M**2)**2
F(M,N)=A(M,N)*(B(M,N)-C(M,N)+D(M,N))/E(M,N)
K=K+1
M=J
N=I
IF(K-2)12,14,14
14 IF(L-1)15,15,17
15 IF(F(I,J)*F(J,I))36,20,20
17 IF(F(I,J)*F(J,I))20,20,40
20 HLAND(I,J)=0.50*SQRT((F(I,J)*F(J,I))/(FNV1(I)*FNV2(J)))
WRITE(5,25)I,J,FNV1(I),FNV2(J),ARGO(I,J),
1 HLAND(I,J),F(I,J),F(J,I)
25 FORMAT(/,5X,'I=',I1,2X,'J=',I1,/,15X,
1 'FNV1(I)=' ,F10.3,4X,'FNV2(J)=' ,F10.3,4X,
2 '//,15X,'ARGO(I,J)=' ,F7.3,5X,'HLAND(I,J)=' ,F7.3
3 '//,15X,'F(I,J)=' ,F12.2,5X,'F(J,I)=' ,F12.2)
WRITE(5,30)
30 FORMAT(/15X,'EPSLN',5X,'OMEL(I,J)',6X,'OMER(I,J)')
DO 35 MAG=1,4
NORD=MAG-1
EPSLN(MAG)=0.1*NORD
OMEL(I,J,MAG)=VERT(I,J)-EPSLN(MAG)*HLAND(I,J)
OMER(I,J,MAG)=VERT(I,J)+EPSLN(MAG)*HLAND(I,J)
WRITE(5,33)EPSLN(MAG),OMEL(I,J,MAG),OMER(I,J,MAG)
33 FORMAT(15X,F4.2,2(3X,F12.4))
35 CONTINUE
36 IF(I-2)40,37,37
37 IF(J-2)40,38,38
38 L=2
GO TO 7
40 CONTINUE
50 CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED
EXTENDED PRECISION
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 2844 PROGRAM 1172

REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

HL=0.9908416

P= 0.00

I=1 J=1

FNVT1(I)= 77.315 FNVT2(J)= 713.684

ARGO(I,J)= 0.443 HLAND(I,J)= 0.000

F(I,J)= 0.16 F(J,I)= 0.16

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	791.0005	791.0005
0.10	791.0004	791.0005
0.20	791.0004	791.0005
0.30	791.0004	791.0006

I=2 J=2

FNVT1(I)= 309.263 FNVT2(J)= 2854.738

ARGO(I,J)= 1.775 HLAND(I,J)= 0.018

F(I,J)= -35.64 F(J,I)= -35.64

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	3164.0020	3164.0020
0.10	3164.0001	3164.0039
0.20	3163.9982	3164.0058
0.30	3163.9963	3164.0077

I=2 J=1

FNVT1(I)= 309.263 FNVT2(J)= 713.684

ARGO(I,J)= 0.226 HLAND(I,J)= 0.000

F(I,J)= -0.00 F(J,I)= 0.14

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	404.4213	404.4213
0.10	404.4213	404.4213
0.20	404.4213	404.4213
0.30	404.4213	404.4213

I=1 J=2

FNVT1(I)= 77.315 FNVT2(J)= 2854.738

ARGO(I,J)= 1.558 HLAND(I,J)= 0.130

F(I,J)= 412.92 F(J,I)= -36.50

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	2777.4228	2777.4228
0.10	2777.4097	2777.4359
0.20	2777.3967	2777.4489
0.30	2777.3836	2777.4620

REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

HL=0.9908416

P= 0.50

I=1 J=1

FNVT1(I)= 66.080 FNVT2(J)= 712.555

ARGO(I,J)= 0.436 HLAND(I,J)= 0.000

F(I,J)= 0.15 F(J,I)= 0.15

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	778.6360	778.6360
0.10	778.6360	778.6361
0.20	778.6360	778.6361
0.30	778.6359	778.6362

I=2 J=2

FNVT1(I)= 298.663 FNVT2(J)= 2853.609

ARGO(I,J)= 1.768 HLAND(I,J)= 0.019

F(I,J)= -36.61 F(J,I)= -36.61

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	3152.2729	3152.2729
0.10	3152.2709	3152.2748
0.20	3152.2689	3152.2768
0.30	3152.2669	3152.2788

I=2 J=1

FNVT1(I)= 298.663 FNVT2(J)= 712.555

ARGO(I,J)= 0.232 HLAND(I,J)= 0.000

F(I,J)= -0.00 F(J,I)= 0.14

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	413.8919	413.8919
0.10	413.8919	413.8919
0.20	413.8919	413.8919
0.30	413.8919	413.8919

I=1 J=2

FNVT1(I)= 66.080 FNVT2(J)= 2853.609

ARGO(I,J)= 1.563 HLAND(I,J)= 0.258

F(I,J)= 753.25 F(J,I)= -66.74

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	2787.5287	2787.5287
0.10	2787.5029	2787.5546
0.20	2787.4771	2787.5804
0.30	2787.4513	2787.6062

REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

HL=0.9908416

P= 1.00

I=1 J=1

FNVT1(I)=	52.494	FNVT2(J)=	711.423
ARGO(I,J)=	0.428	HLAND(I,J)=	0.000
F(I,J)=	0.14	F(J,I)=	0.14
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	763.9180	763.9180	
0.10	763.9180	763.9181	
0.20	763.9180	763.9181	
0.30	763.9179	763.9182	

I=2 J=2

FNVT1(I)=	287.672	FNVT2(J)=	2852.480
ARGO(I,J)=	1.761	HLAND(I,J)=	0.020
F(I,J)=	-37.69	F(J,I)=	-37.69
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	3140.1529	3140.1529	
0.10	3140.1509	3140.1550	
0.20	3140.1488	3140.1571	
0.30	3140.1467	3140.1592	

I=2 J=1

FNVT1(I)=	287.672	FNVT2(J)=	711.423
ARGO(I,J)=	0.237	HLAND(I,J)=	0.000
F(I,J)=	-0.00	F(J,I)=	0.15
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	423.7511	423.7511	
0.10	423.7511	423.7511	
0.20	423.7511	423.7511	
0.30	423.7511	423.7511	

I=1 J=2

FNVT1(I)=	52.494	FNVT2(J)=	2852.480
ARGO(I,J)=	1.570	HLAND(I,J)=	87.463
F(I,J)=	-227071.62	F(J,I)=	20178.54
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	2799.9860	2799.9860	
0.10	2791.2396	2808.7324	
0.20	2782.4933	2817.4788	
0.30	2773.7469	2826.2252	

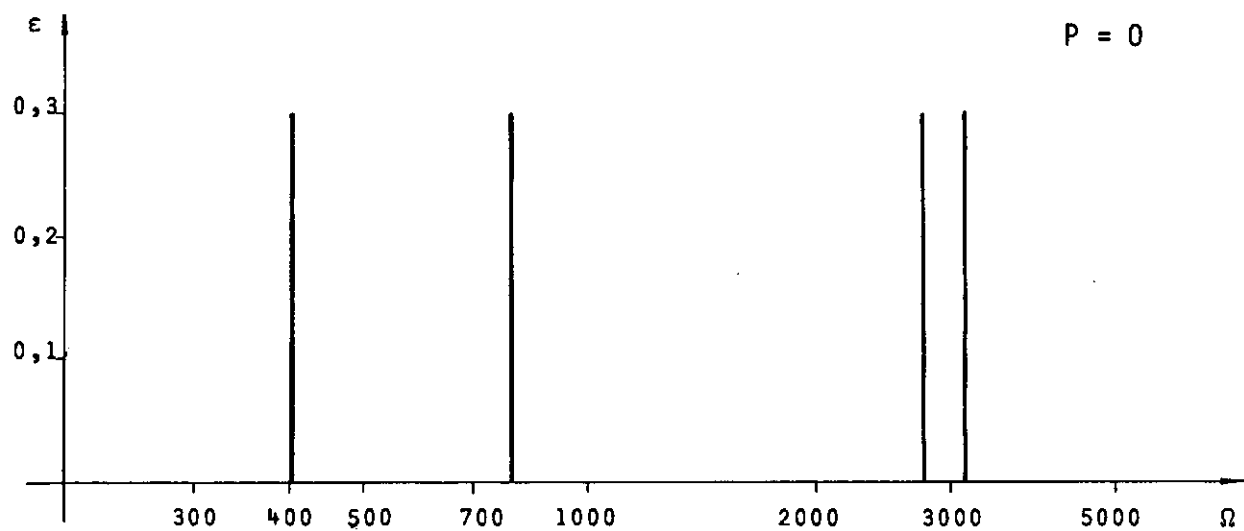


Fig.5.1

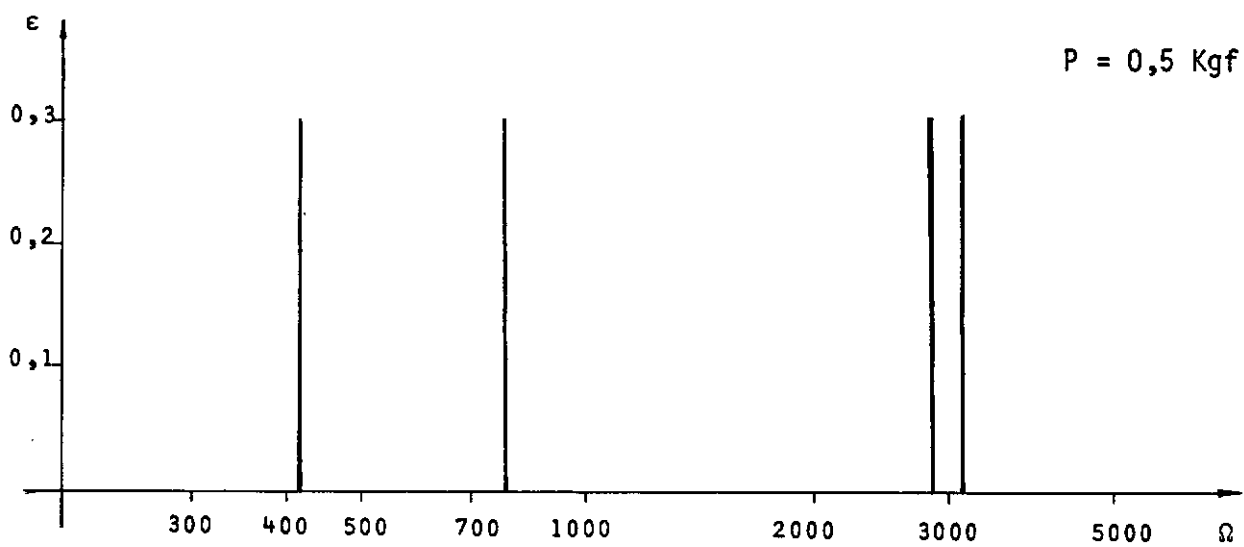


Fig.5.2

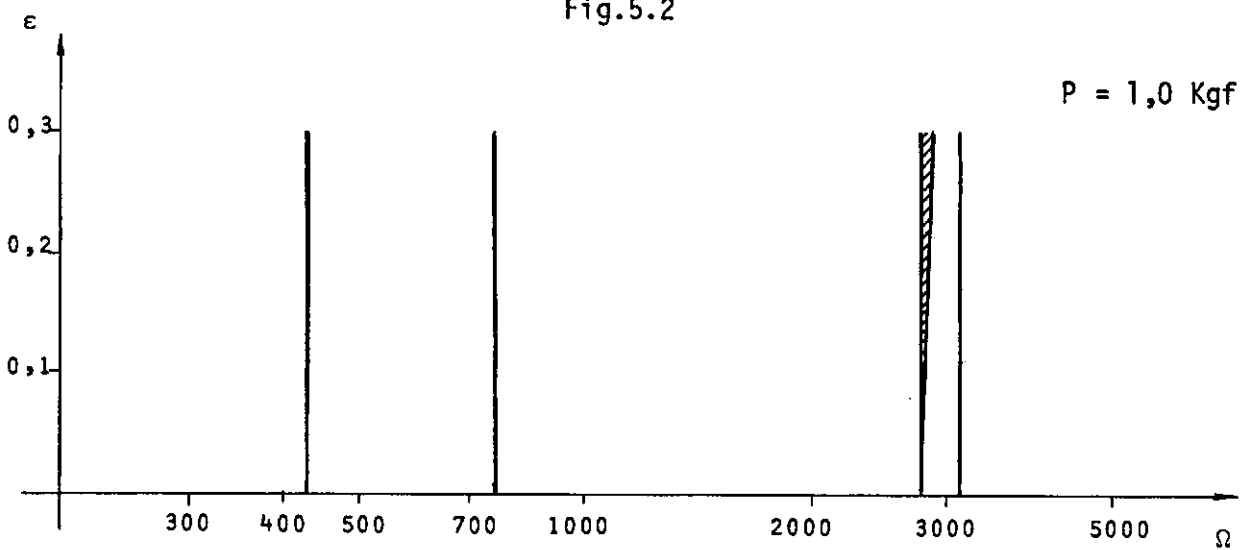


Fig.5.3

5.2 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS

A partir das curvas resposta obtidas na experiência pelo registrador de níveis, construiu-se os gráficos apresentados nas figuras (5.4), (5.5), (5.6) e (5.7), onde se têm as faixas de ressonância dos diversos gráficos resposta, para diferentes forças de compressão, como descrito anteriormente.

Nestes resultados estão incluídas todas as ressonâncias obtidas para o sistema constituído pela barra, excitador, contra-mola e suportes.

De acordo com a calibração já descrita (parágrafo 4.2), foi possível eliminar as ressonâncias do conjunto excitador - contra-mola - suportes dos gráficos resposta do sistema.

A seguir realizou-se uma comparação entre faixas de frequências ressonantes dos gráficos resposta FIJ e TIJ, de mesma série, determinando-se assim as frequências de ressonância torcionais da viga, apresentadas na tabela (5.1), que também foram excluídas por não serem necessárias à determinação das regiões de instabilidade paramétrica.

As faixas de ressonância restantes são as frequências ressonantes paramétricas da viga, de natureza flexional (assegurada pelo procedimento experimental), apresentadas nos gráficos das figuras (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11).

As regiões de instabilidade elastodinâmica da viga, determinadas experimentalmente são mostradas em gráficos ϵ vs. Ω (fi

guras (5.12), (5.13) e (5.14)). Nestes gráficos a frequência de excitação Ω é apresentada em escala logarítmica por coerência com o Controlador Automático de Excitação de Vibração. Os valores experimentais do parâmetro ϵ (função do momento torçor T_1 , do comprimento da viga L e da massa por unidade comprimento m) são calculados no apêndice IV.

TABELA 5.1 -

FREQUÊNCIAS NATURAIS DE TORÇÃO DA VIGA Hz	
Faixa	Pico
185 - 230	230
430 - 500	470
1300 - 1500	1470
2400 - 2500	2430
4100 - 4200	4150

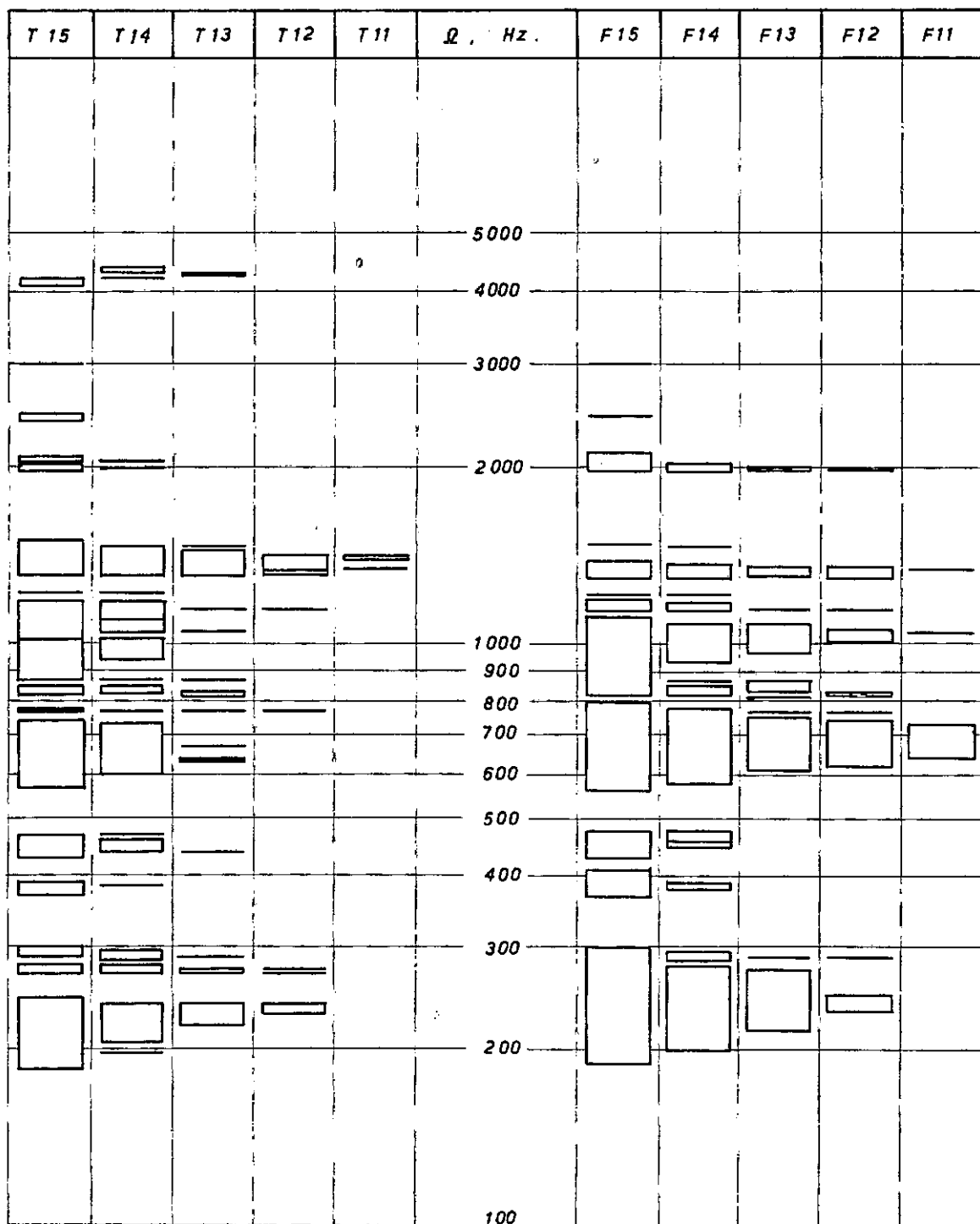


FIG. 5.4

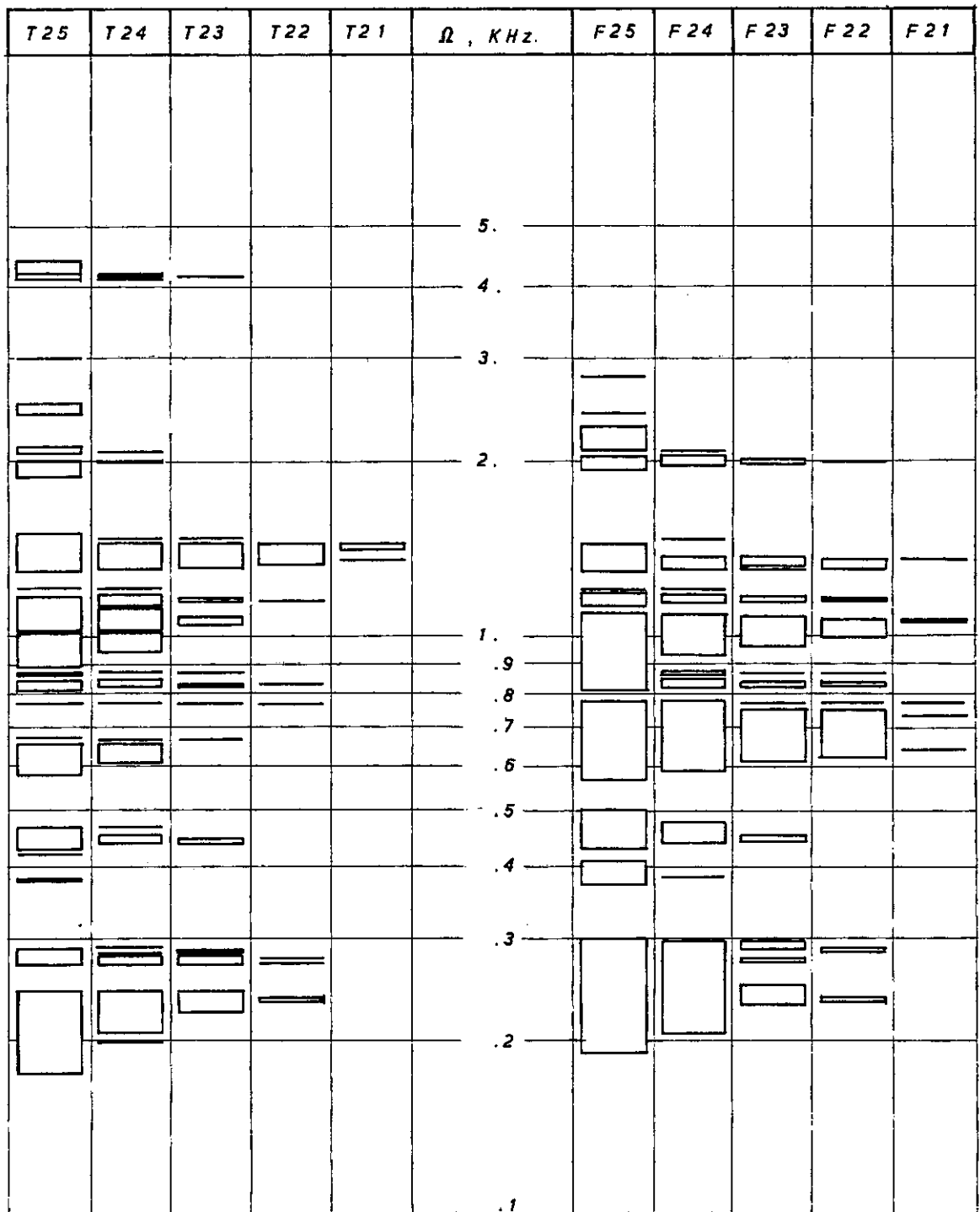


FIG. 5.5

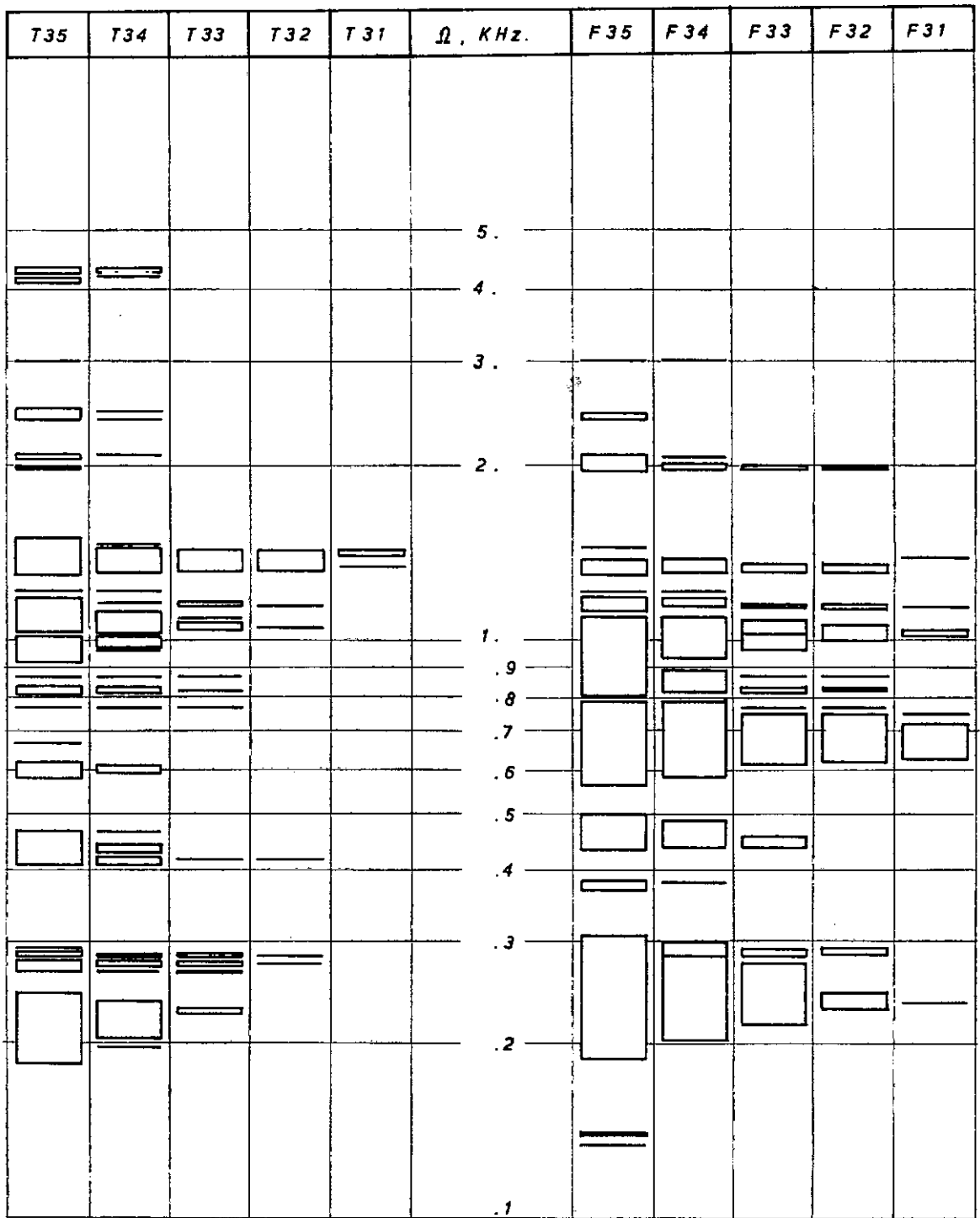
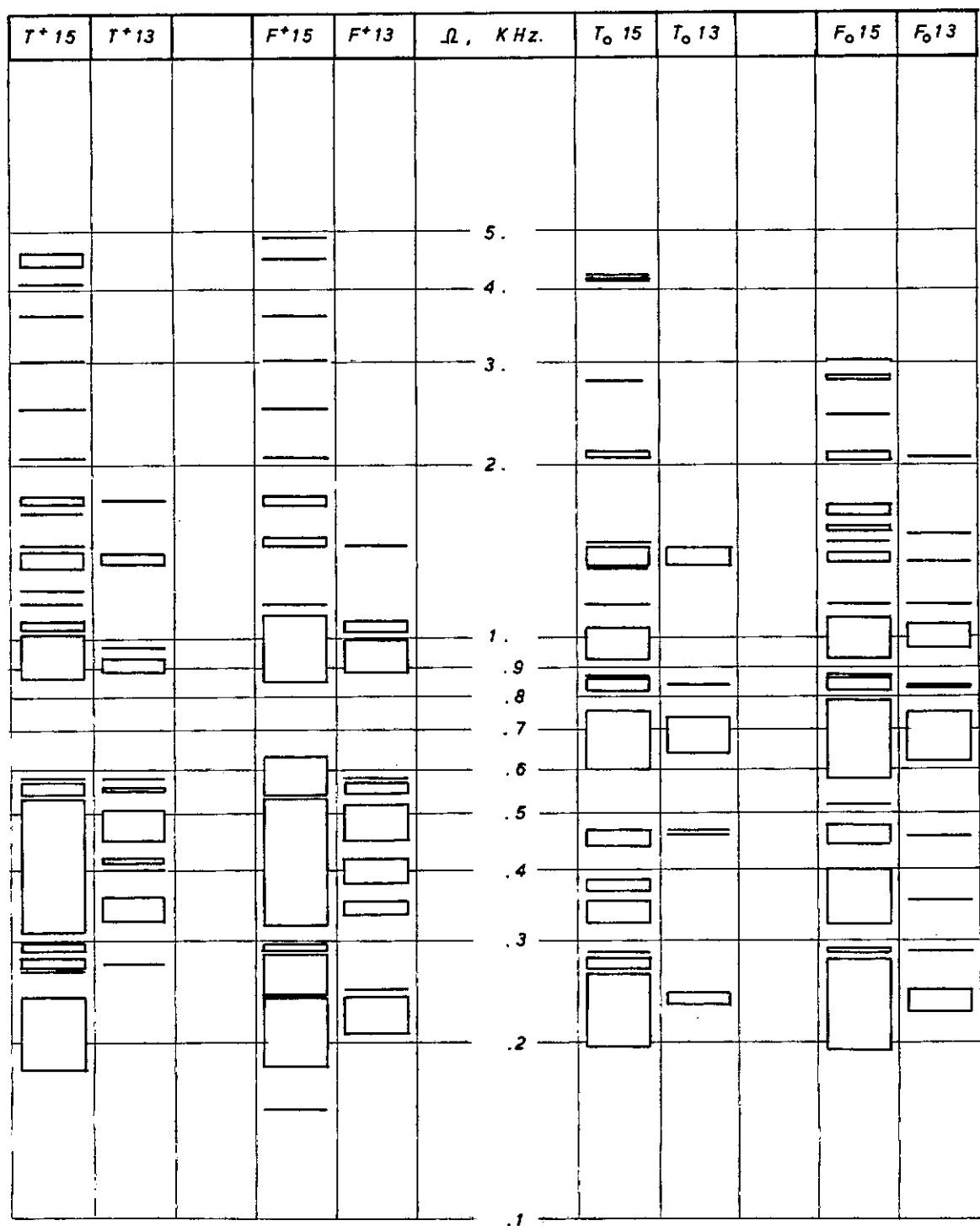


FIG. 5.6



(a)

(b)

FIG. 5.7

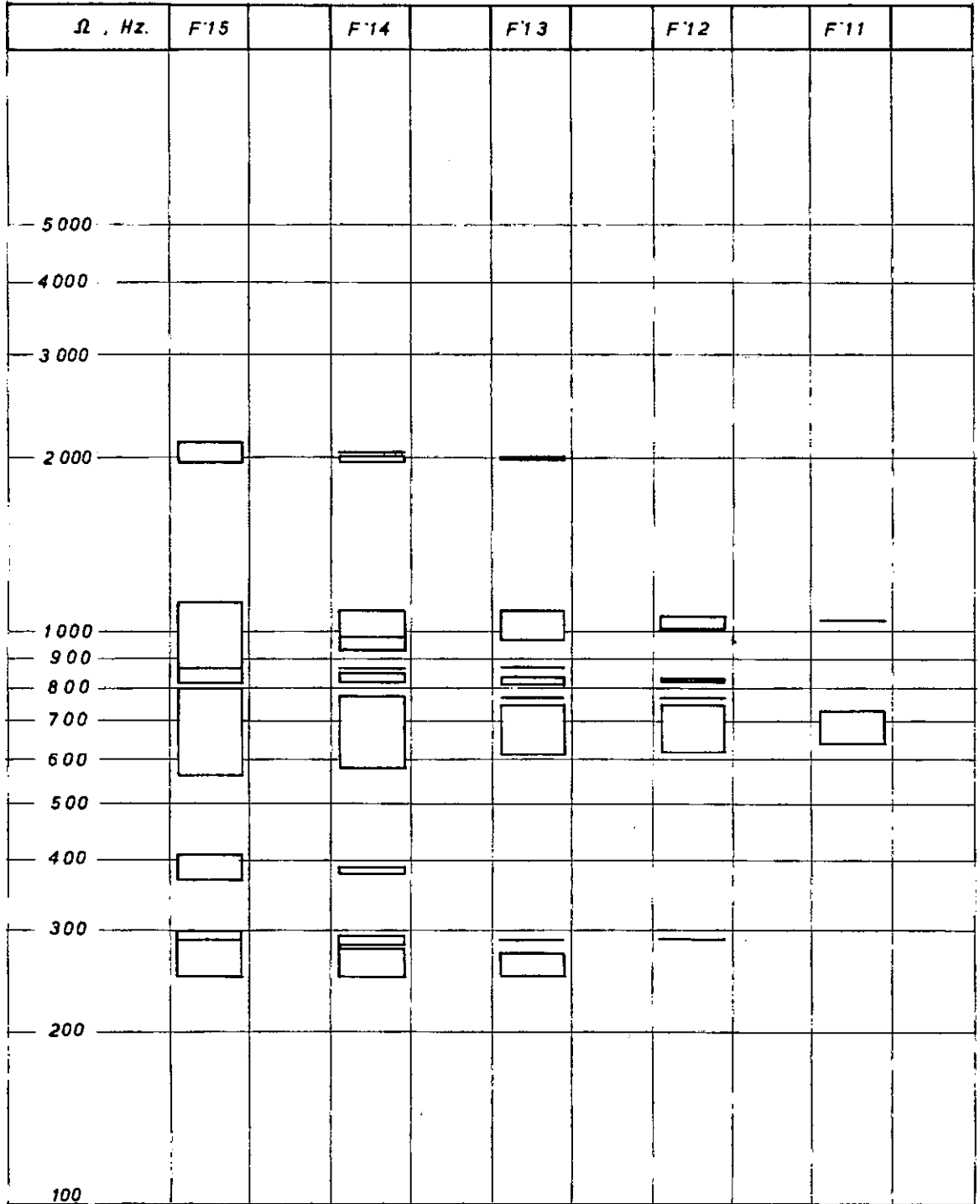


FIG. 5.8

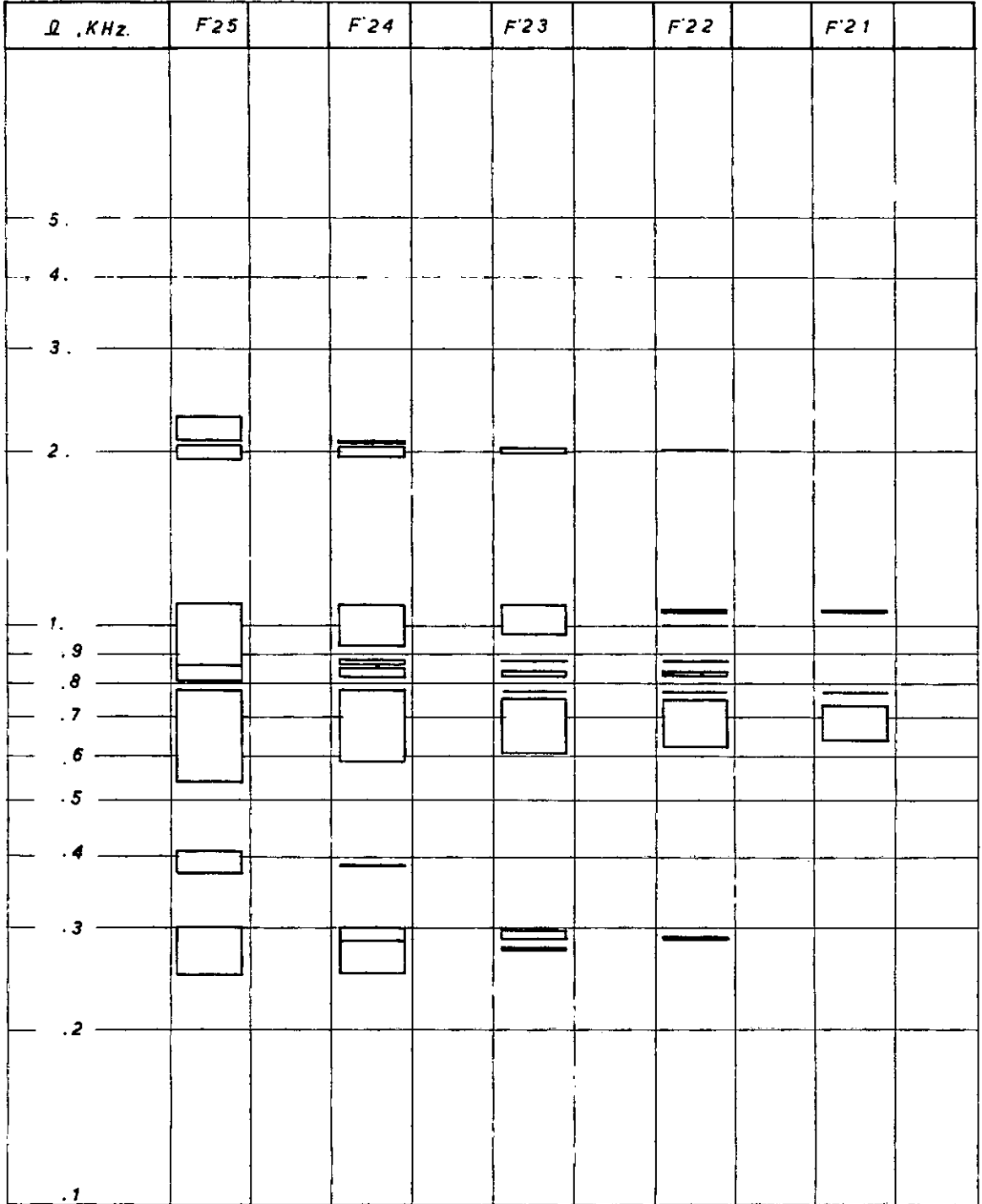


FIG. 5.9

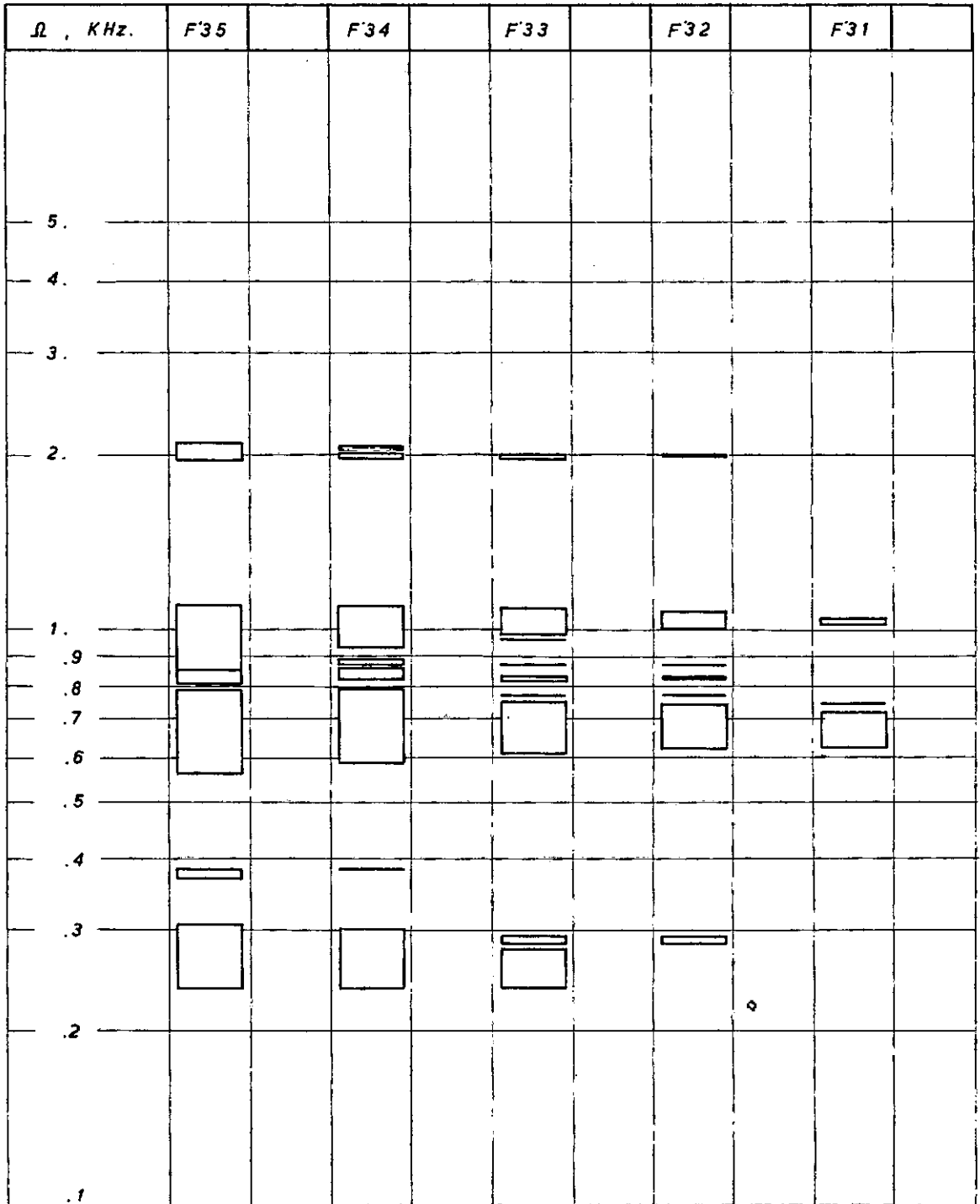
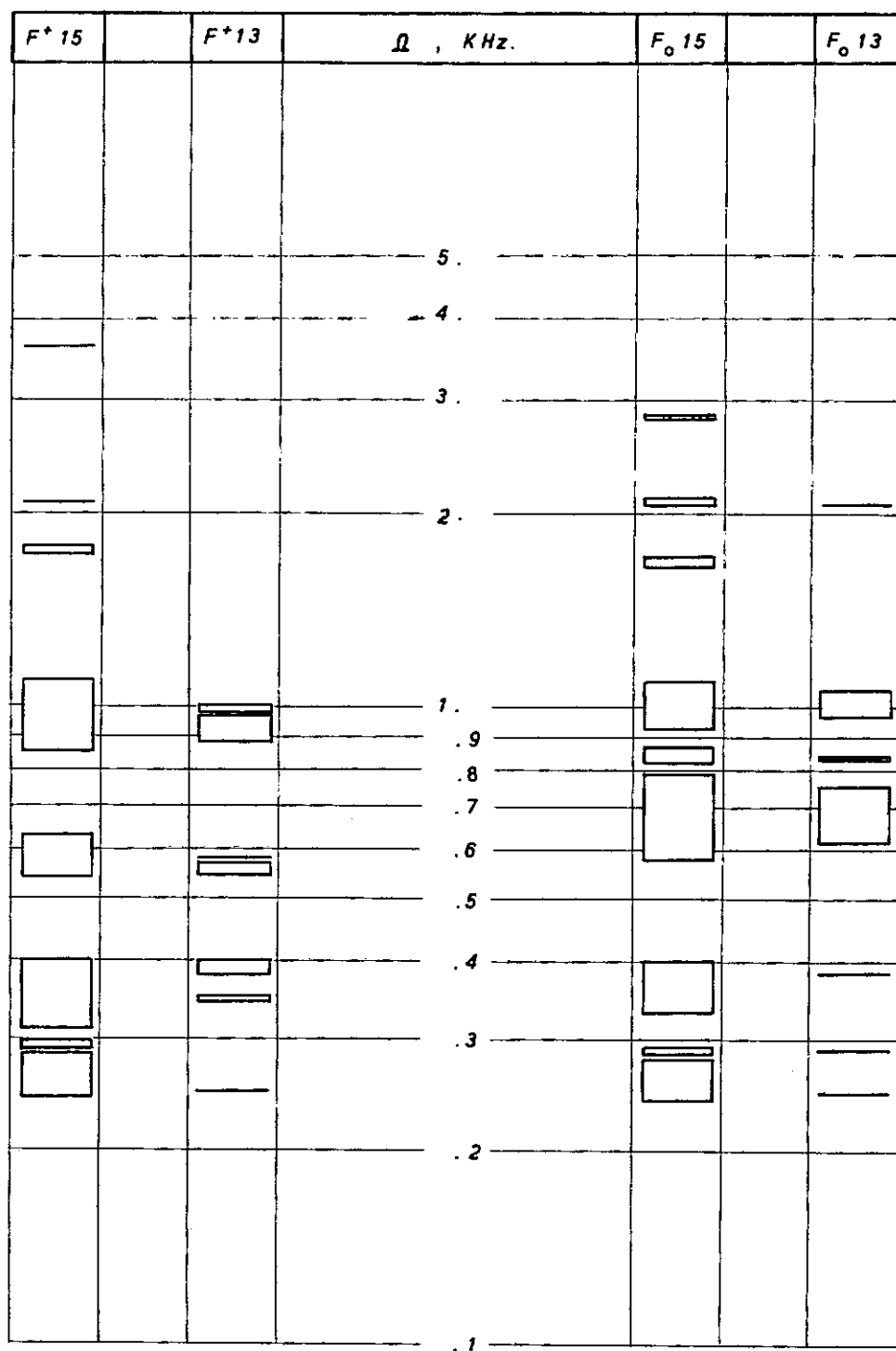


FIG. 5.10



(a)

(b)

FIG. 5.11

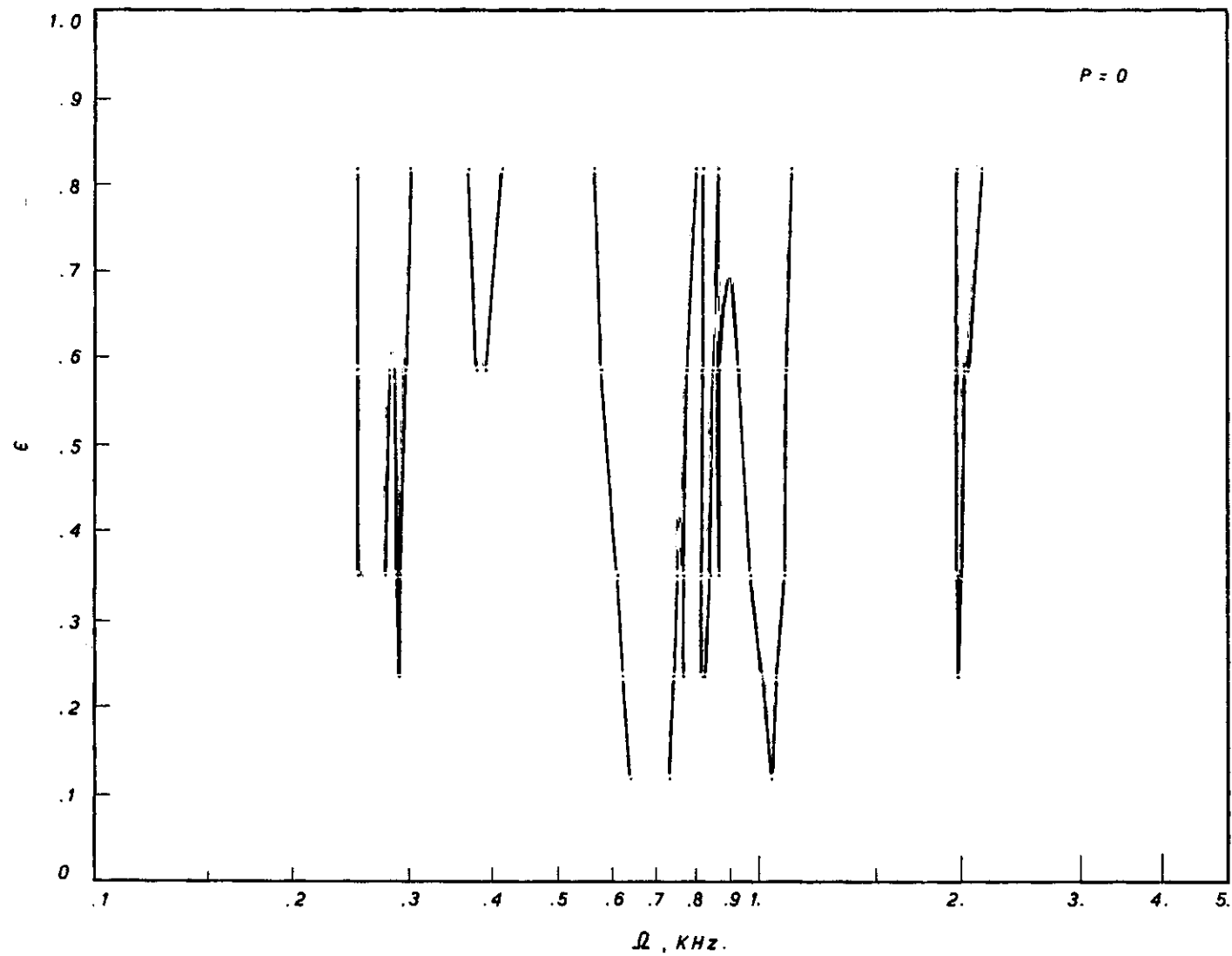


FIG. 5.12

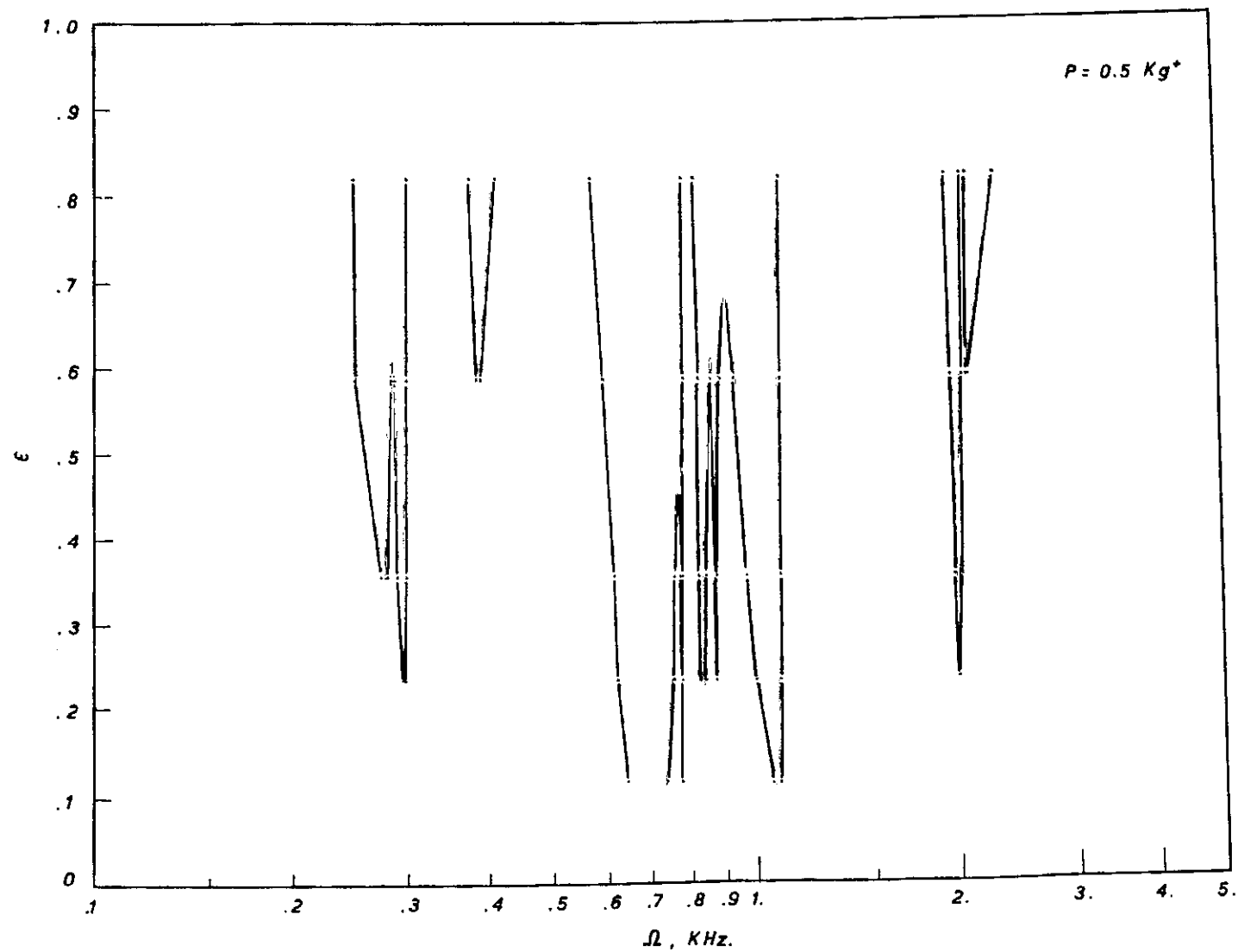


FIG. 5.13

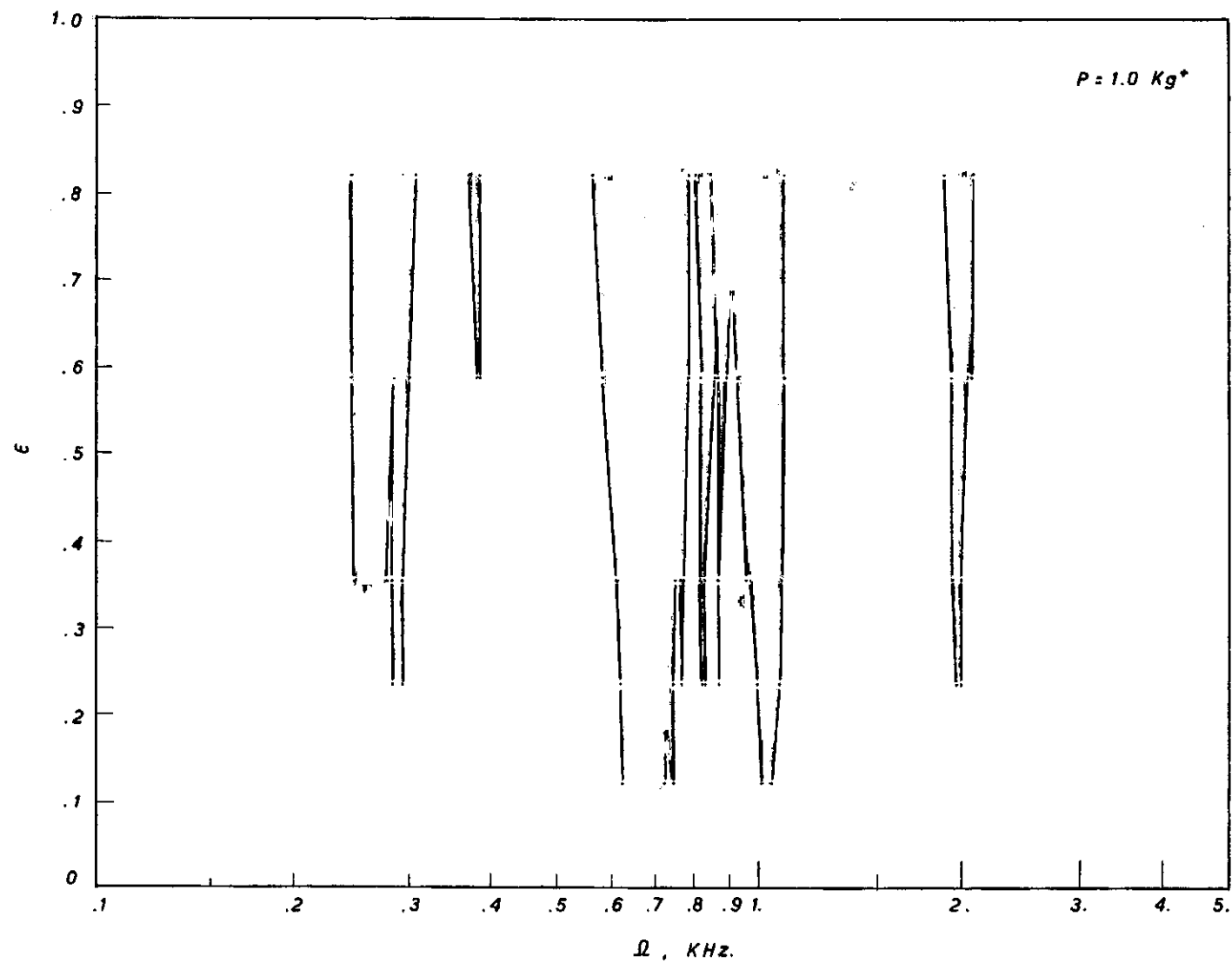


FIG. 5.14

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 - CONCLUSÕES

A teoria na qual se baseou este trabalho é válida somente para pequenos valores do parâmetro ϵ ($0 < \epsilon \ll 1$). Devido às limitações de se realizar experimentalmente um modelo de pequenas proporções alguns dos valores de ϵ abordados foram bem maiores que os cobertos pela teoria.

Além disto, pela aplicação da teoria à viga usada na experiência determinou-se faixas de ressonância paramétrica bastante estreitas, sem alargamento com o aumento do parâmetro ϵ . A faixa foi extremamente pequena, quase uma linha, de acordo com os gráficos teóricos das figuras (5.1), (5.2) e (5.3) determinados pelos programas CCV1 e RIED1.

Talvez seja possível obter um alargamento das faixas de ressonância paramétrica com dimensões de vigas bem maiores, o que não era viável na época devido às limitações experimentais.

Assim, torna-se difícil comparar os resultados teóricos com os experimentais, apesar do que nestes últimos se encontrou faixas amplas de regiões de ressonância.

As medidas do registrador de papel foram feitas com potenciômetro linear. Se houvesse disponibilidade de um potenciômetro logarítmico a tarefa de abranger a variação de amplitude do sinal seria bastante facilitada.

Realmente, pela calibração da viga sendo excitada à flexão (pág. 32), verifica-se que há uma flexibilidade dos engastes tornando mais difícil a comparação com as frequências naturais previstas pela teoria (cálculo no apêndice VI).

Embora teoricamente não haja previsão de alargamento das faixas de ressonância, foi constatado experimentalmente a ocorrência deste fenômeno, podendo ser este atribuído a existência de amortecimento nas experiências, fator este não previsto na teoria.

Pode-se comprovar pelos gráficos das figuras (5.12), (5.13) e (5.14) que na terceira ressonância paramétrica, a 700 Hz aproximadamente, o alargamento da faixa de ressonância ocorre a níveis bem mais baixos que na primeira e segunda, em torno de 260 e 370 Hz respectivamente. Este comportamento é compatível com os resultados teóricos de BOLOTIN⁽⁷⁾ relativos a instabilidade paramétrica com amortecimento.

Outro fato que tornou crítico o modelo experimental com pequenas dimensões foi a dificuldade em alinhar perfeitamente a viga com os suportes, de modo que a força de compressão atuasse no eixo que passa pelos centros de gravidade da secção transversal da viga.

Conforme mostrado nos gráficos das figuras (5.1), (5.2) e (5.3) a teoria prevê um deslocamento das faixas de

ressonância paramétrica com a variação da força de compressão axial P . No dispositivo de compressão utilizado não se pode garantir a constância da força P . Isto justifica o não deslocamento das faixas de ressonância paramétrica levantadas experimentalmente quando se varia a força de compressão.

Outra observação interessante pode ser feita nos gráficos das regiões de ressonância paramétrica, determinados experimentalmente e apresentados nas figuras (5.12), (5.13) e (5.14). No intervalo imposto teoricamente para o parâmetro ϵ , $[0, 0.3]$, encontrou-se sete faixas de ressonância para a gama de frequências de 100 a 5000 Hz, enquanto que o resultado teórico, apresentado nos gráficos das figuras (5.1), (5.2) e (5.3), previu apenas quatro faixas de instabilidade.

Uma possível explicação para este fato é que a teoria não determina instabilidade relativa às combinações de modos flexionais de ordem superior a dois. De acordo com a equação (1.9), valores elevados de ω_{1r} e ω_{2p} , correspondentes a modos de ordem superior, podem resultar em valores Ω_0 relativamente pequenos, dentro da faixa de frequência pesquisada experimentalmente.

6.2 - SUGESTÕES

Com a existência de uma placa de reação seria possível realizar a verificação experimental em uma barra de dimensões bem maiores, simplificando enormemente o problema do controle da força de excitação, a determinação das deflexões e a realização da experiência dentro dos limites impostos pelo modelo matemático.

A determinação de outro material para a viga seria interessante, pois foi constatado posteriormente que uma viga de cobre traria melhores resultados dentro das limitações de viga de pequenas dimensões.

O processo ótico descrito no capítulo III, parágrafo 3.3, poderia ser utilizado para calibrar o deslocamento da agulha do meio da face maior da secção transversal para a borda, durante a medição com o transdutor de cristal de quartzo. Isto garantiria a mesma sensibilidade de recepção nos dois pontos de medidas.

LISTA DE SÍMBOLOS

b	- largura da viga.
c	- velocidade propagação das ondas torcionais.
c_{hk}	- rigidez elástica do transdutor piezo-elétrico
C_o	- capacitância elétrica.
d'	- diâmetro do disco do transdutor piezo-elétrico.
D_1	- diâmetro maior do eixo da viga.
e_{ik}	- constante piezo-elétrica.
E	- módulo de elasticidade longitudinal da viga.
F_{rp}	- parâmetro relativo ao momento axial harmônico de excitação.
F_1	- força no transdutor piezo-elétrico.
F	- força na lâmina de compressão.
G	- módulo de elasticidade transversal da viga.
h	- espessura da viga.
I_p	- momento de inércia polar da secção transversal da viga.
I_1, I_2	- momento de inércia principal da secção transversal da viga em relação aos eixos x e y respectivamente.
k	- coeficiente dependente da relação entre os lados da secção transversal da viga.
K	- coeficiente de rigidez do transdutor piezo-elétrico.
K_c	- coeficiente de acoplamento eletromecânico do transdutor piezo-elétrico.
ℓ	- comprimento da lâmina do dispositivo de compressão
ℓ_1, ℓ_2	- distâncias da força aos apoios na lâmina de compressão.
ℓ'	- espessura do transdutor piezo-elétrico.

- L - comprimento da viga.
- L_{CR} - comprimento crítico à ressonância paramétrica.
- m - massa por unidade de comprimento da viga.
- n - ordem dos modos das vibrações torcionais da viga.
- p - ordem dos modos das vibrações flexionais da viga.
- P - força de compressão axial.
- $q_{1r}(t), q_{2p}(t)$ - coordenadas generalizadas associadas aos modos de ordem r/p das vibrações flexionais da viga no plano XY / XZ .
- r - ordem dos modos das vibrações flexionais da viga.
- S - área de recepção do transdutor piezo-elétrico.
- $T(t)$ - momento axial periódico de excitação.
- T_0 - momento axial constante de excitação.
- T_1 - amplitude do momento axial periódico de excitação.
- V - voltagem do transdutor piezo-elétrico.
- Z_1 - impedância elétrica.
- α - fator de transformação da sensibilidade do transdutor piezo-elétrico.
- δ_1 - deflexão estática da lâmina de compressão.
- ϵ - parâmetro relativo ao momento torçor de excitação.
- ϵ' - constante dielétrica relativa do transdutor piezo-elétrico.
- ϵ_0 - constante dielétrica.
- θ - coordenada do deslocamento torcional da viga.
- θ_1 - ângulo de fase do módulo da impedância.
- ρ - massa específica do material da viga.
- Ω - frequência do momento axial harmônico de excitação.
- Ω_0 - idem acima, parametricamente ressonantes.

- ω_{1r} - frequências naturais das vibrações transversais da viga no plano XY.
- ω_{2r} - idem acima, no plano XZ.

BIBLIOGRAFIA

1. HSU, C.S.

"On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom"

J.Appl. Mech., ASME, pags. 367-372, SEPT. 1963

2. SOMERSET, J.H. & EVAN - IWANOWSKI, R.M.

"Experiments on Parametric Instability of Columns"

Proc. Second Southeastern Conf. on Theor. and App. Mech., Atlanta, Ga, March, 1964, pags. 503-525

3. HAGEDORN, P.

"Parametric Ressonance in Certain Nonlinear Systems"

Periodic Orbits, Stability and Ressonances, D. Reidel Publishing, Dordrecht, 1970, pags. 482-492

4. HAGEDORN, P. & KOVAL, L.R.

"On the Parametric Stability of a Timoshenko Beam Subjected to a Periodic Axial Load"

Ingenieur Archiv. 40, 1971, pags. 211-220

5. LARANGEIRA, J.L.

"Instabilidade Elastodinâmica de uma Viga sob Ação de um Momento Axial Periódico"

Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Dezembro 1971

6. TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J.N.
"Theory of Elasticity"
McGraw-Hill, Tokio, 1951
7. BOLOTIN, V.V.
"The Dynamic Stability of Elastic Systems"
Holden Day, S.Francisco, 1964
8. ROARK,
"Formulas for Stress and Strain"
McGraw-Hill, N.Y.
9. HUETER & BOLT
"Sonics"
J.Wiley & Sons, N.Y., 1965
10. BRADFIELD, G.
"Ultrasonic Transducers"
Ultrasonics, pags. 177-189, July, 1970
11. WILSON, W.K.
"Practical Solution of Torsional Vibration Problems"
Vol. I, John Wiley & Sons, N.Y. 1956
12. THOMSON, W.T.
"Vibration Theory and Applications"
George Allen & Unwin, London, 1965

13. KEAST, D.N.
"Measurements in Mechanical Dynamics"
McGraw-Hill, 1967
14. PANOVKO, Ya.
"Elements of the Applied Theory of Elastic Vibration"
MIR PUB., Moscow, 1971
15. PACITTI, T.
"Princípios de FORTRAN"
Ao Livro Técnico, R.J., 1969
16. HARRIS & CREDE
"Shock and Vibration Handbook"
Vol. I - McGraw-Hill, N.Y., 1961
17. DEN HARTOG, J.P.
"Advanced Strength of Materials"
McGraw-Hill, N.Y., 1952

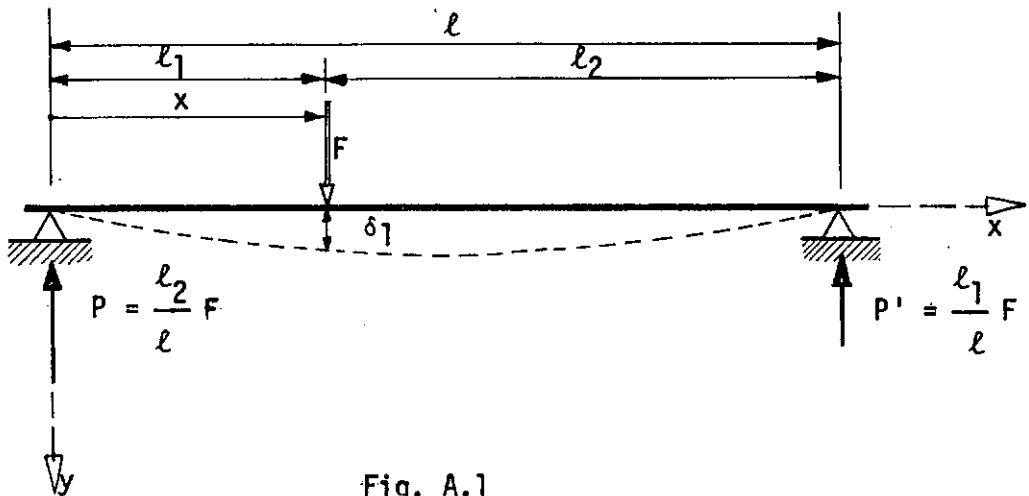
APÊNDICE I

CALIBRAÇÃO DO DISPOSITIVO DE COMPRESSÃO

A deflexão estática δ_1 de uma viga uniforme bi-apoiada, ver dispositivo de compressão na figura (2.3) e na foto (6), causada pela força F , figura (A.1), é dada pela expressão (ver por exemplo, ROARK⁽⁸⁾) :

$$\delta_1 = \frac{P}{6EI} \times (\ell^2 - \ell_2^2 - x^2) \quad (\text{A.I.1})$$

onde os elementos de (A.I.1), mostrados na figura (A.1), valem para o caso



em questão:

$$\ell_1 = x = 43,86\text{mm}$$

$$\ell_2 = 53,98\text{mm}$$

$$\ell = 96,84\text{mm}$$

$$E = 19,7 \times 10^3 \text{ Kgf/mm}^2 \quad (\text{para aço-inox})$$

$$I = \frac{b_1^3 h_1}{12}, \text{ sendo } b_1 = 13,7\text{mm}$$

$$h_1 = 1,21\text{mm}$$

$$I = 2,02\text{mm}^4$$

Substituindo estes valores em (A.I.1) chega-se

a:

$$\delta_1 \approx 0,87 P \quad (\text{A.I.2})$$

onde,

δ_1 é dado em |mm| e P em |Kgf|.

Partindo-se desta expressão construiu-se a ta-

bela A.I.1

TABELA A.I.1 -

δ_1 mm	P Kgf
0	0
0,1	0,087
0,2	0,174
0,3	0,261
0,4	0,348
0,5	0,435
0,6	0,522
0,8	0,696
1,0	0,870
1,5	1,305
2,0	1,740

APÊNDICE II

CURVA DE IMPEDÂNCIA DO TRANSDUTOR DE QUARTZO

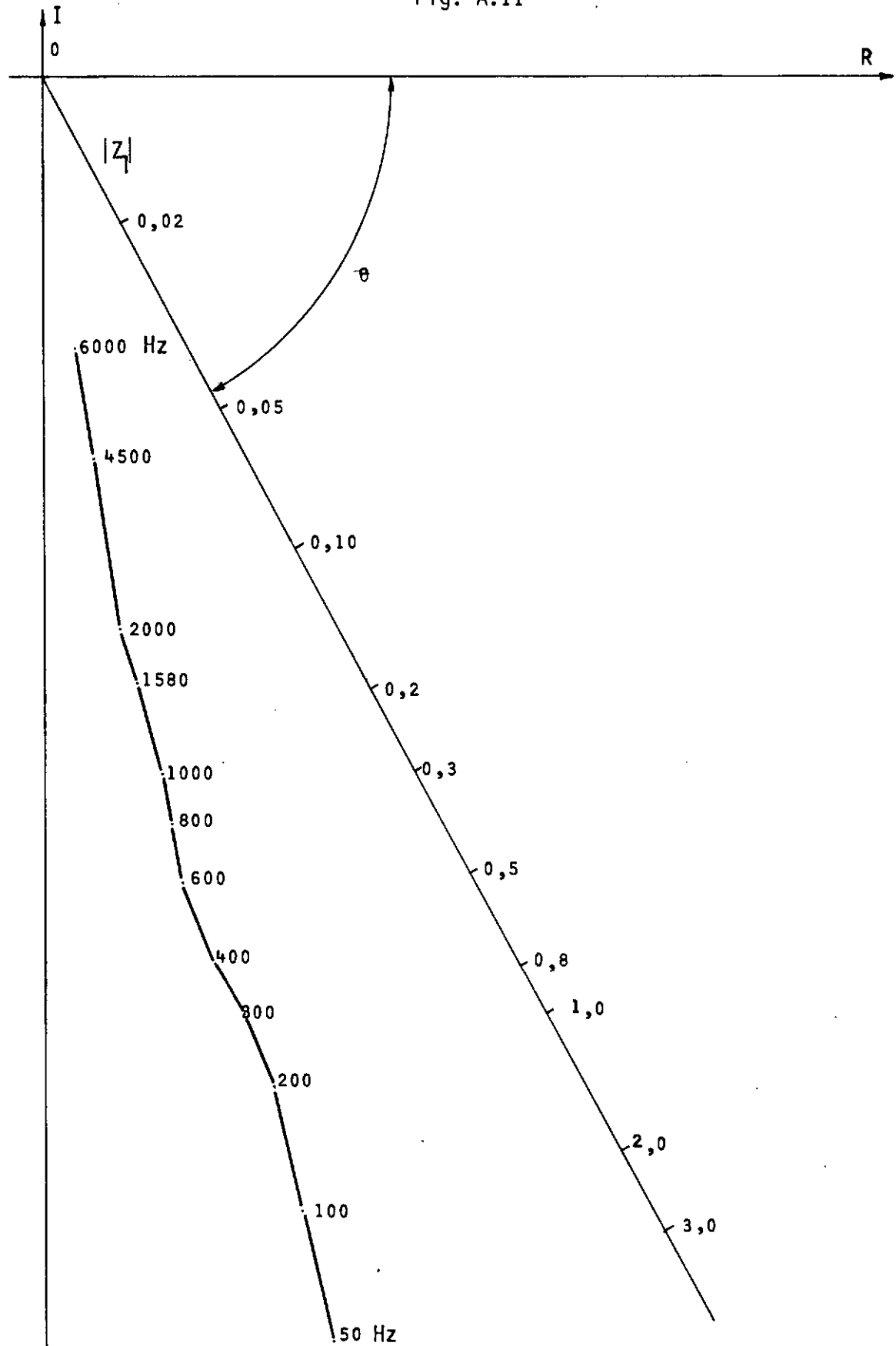
O levantamento de impedâncias foi feito com o Medidor de Impedância Vetorial, marca Hewlett Packard, modelo 4800A, na faixa de frequências de interesse.

A tabela de dados obtidos (tabela A.II.1) e a curva (fig.A.II) são mostrados a seguir:

TABELA A.II.1 -

Frequência Hz	Impedância Z ₁ MΩ	Ângulo de Fase θ ₁ graus
50	2,80	- 77
70	2,15	- 77
100	1,55	- 77
158	1,04	- 77,5
200	0,88	- 77
250	.74	- 78
276	.68	- 78
300	.63	- 78
350	.54	- 79
400	.49	- 79
600	.34	- 80
800	.26	- 80
1000	.21	- 80
1300	.17	- 80,5
1580	.14	- 81
2000	.111	- 82
2500	.088	- 82
3000	.076	- 82
4000	.058	- 81,5
4500	.052	- 82
5000	.047	- 82,5
6000	.032	- 83

Fig. A.II



APÊNDICE III

DETERMINAÇÃO DA SENSIBILIDADE DINÂMICA DO TRANSDUTOR PIEZO-ELÉTRICO CLEVITE
PZT5 - DISCO CERÂMICO

Dimensões:

- diâmetro $d' = 1/2''$
- espessura $l' = 1/4''$

Considerando-se a teoria simples de receptores piezo-elétricos, HUETER & BOLT⁽⁹⁾, e por estar a faixa de frequência utilizada nos ensaios, 50 a 5000 Hz, muito abaixo da 1ª ressonância do transdutor (13.500 Hz), tem-se que a sensibilidade dinâmica do mesmo será:

$$\frac{V}{F_1} = \frac{1}{\alpha} \frac{K_C^2}{1 + K_C^2}, \quad (\text{A.III.1})$$

onde,

V - voltagem

 F_1 - força K_C - coeficiente de acoplamento eletromecânico α - fator de transformação

sendo,

$$K_C^2 = \frac{\alpha^2}{K C_0} ; \quad (A.III.2)$$

onde,

$$\alpha = e_{ik} \frac{S}{\ell'} \quad (A.III.3)$$

o coeficiente de rigidez K dado por:

$$K = C_{hk} \frac{S}{\ell'} \quad (A.III.4)$$

a capacitância elétrica (C_0)

$$C_0 = \epsilon' \epsilon_0 \frac{S}{\ell'} \quad (A.III.5)$$

e $S = \pi d^2/4$ a área de recepção do transdutor.

Substituindo-se estes elementos em (A.III.1),

chega-se a,

$$\frac{V}{F_1} = \frac{e_{ik} \ell'}{S' (\epsilon' \epsilon_0 C_{hk} + e_{ik}^2)} |V/N| \quad (A.III.6)$$

Do catálogo do fabricante do transdutor (CLE-VITE) e de BRADFIELD⁽¹⁰⁾, obtem-se:

$$S' = 0,1963 \text{ in}^2 \approx 0,0001267 \text{ m}^2 ;$$

$$\ell' = 1/4'' \approx 0,0635 \text{ m} ;$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ farad/m} ;$$

$$\epsilon' = 1300 ;$$

$$C_{hk} = C_{ii} = 159 \times 10^9 \text{ Newtons / m} ;$$

$$e_{ik} = e_{33} = 15,1 \text{ Coulomb / m}^2 ;$$

que substituídos na expressão (A.III.6) resulta em,

$$\frac{V}{F_1} = 0,369 \text{ Volts / Newton.} \quad (\text{A.III.7})$$

Para a força F em Kgf tem-se:

$$\frac{V}{F_1} \approx 3,62 \text{ V / Kgf} \quad (\text{A.III.8})$$

que é a sensibilidade dinâmica do transdutor PZT5.

APÊNDICE IV

CÁLCULO DO PARÂMETRO ϵ

Para viga bi-engastada à flexão e engastada à torção tem-se que (ver LARANGEIRA⁽⁵⁾):

$$\epsilon = \frac{8 \pi^2 T_1}{m L^3} \quad (\text{A.IV.1})$$

A força de excitação F_1 é aplicada na alavanca à distância $d_1 = 18\text{mm}$ do centro do eixo circular.

De posse dos demais dados da viga:

$$m = 0,0126 \text{ UTM} / \text{m},$$

$$L = 0,993 \text{ m},$$

$$T_1 = 0,018 F_1 \text{ m.Kgf},$$

e substituindo-se em (A.IV.1) chega-se a:

$$\frac{\epsilon}{F_1} = 114,727 \text{ s}^{-2} \cdot \text{Kgf}^{-1}$$

Levando-se em conta a sensibilidade do transdutor de força determinada teoricamente no apêndice III tem-se a relação Voltagem / ϵ :

$$\frac{V}{\epsilon} = 31,553 \text{ mV.s}^2 \quad (\text{A.IV.2})$$

APÊNDICE V

CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO TORCIONAL DA VIGA

Pela teoria, ver DEN HARTOG⁽¹⁷⁾, o ângulo de torção de uma barra chata sujeita a um momento torçor T é dado por:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{0,31 G b h^3}, \text{ para } \frac{b}{h} = \frac{12}{1,3} \quad (\text{A.V.1})$$

Assim:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx = \frac{\partial T}{\partial x} dx \frac{1}{0,31 G b h^3} \quad (\text{A.V.2})$$

Por outro lado, desprezando o empenamento da secção, tem-se que:

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = [\rho I_p dx] \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (\text{A.V.3})$$

onde,

ρ - massa específica

I_p - momento de inércia polar, sendo

$$I_p = \frac{bh^3}{12}, \text{ para secção transversal fina (} b \gg h \text{)}$$

Igualando o termo de inércia de (A.V.2) com o termo restaurador de (A.V.3) chega-se a:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \left(3,72 \frac{h^2}{b^2} \frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\text{A.V.4})$$

Para uma viga engastada a torção as frequências naturais de vibração torcional serão:

$$\omega_{tn} = \frac{2n-1}{4L} \sqrt{3,72 \frac{h^2}{b^2} \frac{G}{\rho}} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.V.5})$$

Substituindo nesta expressão os valores correspondentes da viga experimental obtem-se:

$$\omega_{tn} = 171,11 (2n-1) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.V.6})$$

Portanto, as frequências naturais torcionais , em Hz, serão:

$\omega_{t1} = 171$	$\omega_{t9} = 2909$
$\omega_{t2} = 513$	$\omega_{t10} = 3251$
$\omega_{t3} = 856$	$\omega_{t11} = 3593$
$\omega_{t4} = 1198$	$\omega_{t12} = 3936$
$\omega_{t5} = 1540$	$\omega_{t13} = 4278$
$\omega_{t6} = 1882$	$\omega_{t14} = 4620$
$\omega_{t7} = 2225$	$\omega_{t15} = 4962$
$\omega_{t8} = 2567$	$\omega_{t16} = 5304$

APÊNDICE VI

CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÕES FLEXIONAIS DA VIGA

As frequências naturais de vibrações flexionais de uma viga bi-engastada à flexão são calculadas a partir da expressão (ver por exemplo, THOMSON⁽¹²⁾):

$$\omega_r = (2 r \pi)^2 \sqrt{\frac{EI_1}{m L^4}} \quad (\text{A.VI.1})$$

Dados da viga:

Material: aço inoxidável

$$E = 19,7 \times 10^9 \text{ Kgf} / \text{m}^2$$

$$\rho = 808 \text{ UTM} / \text{m}^3$$

Dimensões: $L = 0,993 \text{ m}$

$$b = 0,0120 \text{ m}$$

$$h = 0,0013 \text{ m}$$

$$I_1 = 2,197 \times 10^{-12} \text{ m}^4$$

$$m = 1,26 \times 10^{-2} \text{ UTM} / \text{m}$$

Substituindo estes valores em (A.VI.1) tem-se:

$$\omega_r = 73,43 r^2 \text{ Hz} \quad (\text{A.VI.2})$$

Então:

$$\omega_1 = 73,43 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 293,7 \text{ "}$$

$$\omega_3 = 660,8 \text{ "}$$

$$\omega_4 = 1174,9 \text{ "}$$

$$\omega_5 = 1835,7 \text{ "}$$

$$\omega_6 = 2643,5 \text{ "}$$

$$\omega_7 = 3598,1 \text{ "}$$

$$\omega_8 = 4699,5 \text{ "}$$

$$\omega_9 = 5947,8 \text{ "}$$

$$\omega_{10} = 7343,0 \text{ "}$$

APÊNDICE VII

CURVA DE $k = f(b, h)$

Com a finalidade de facilitar a determinação direta do coeficiente k , dependente da forma da secção transversal de uma viga, de TIMOSHENKO & GOODIER⁽⁶⁾, construiu-se o gráfico $k = f(b, h)$ da figura (A.VII), na página seguinte.

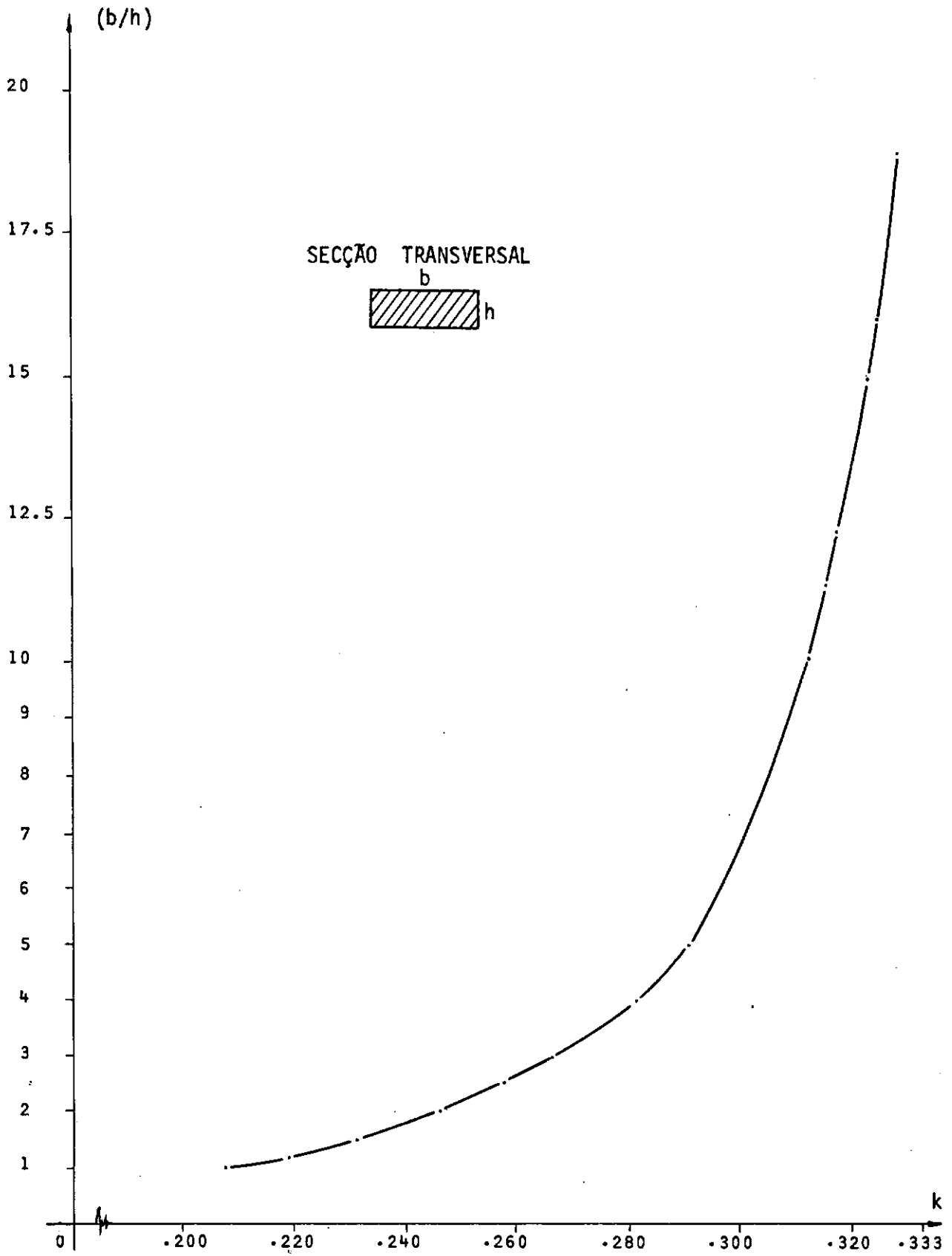


Fig. A.VII

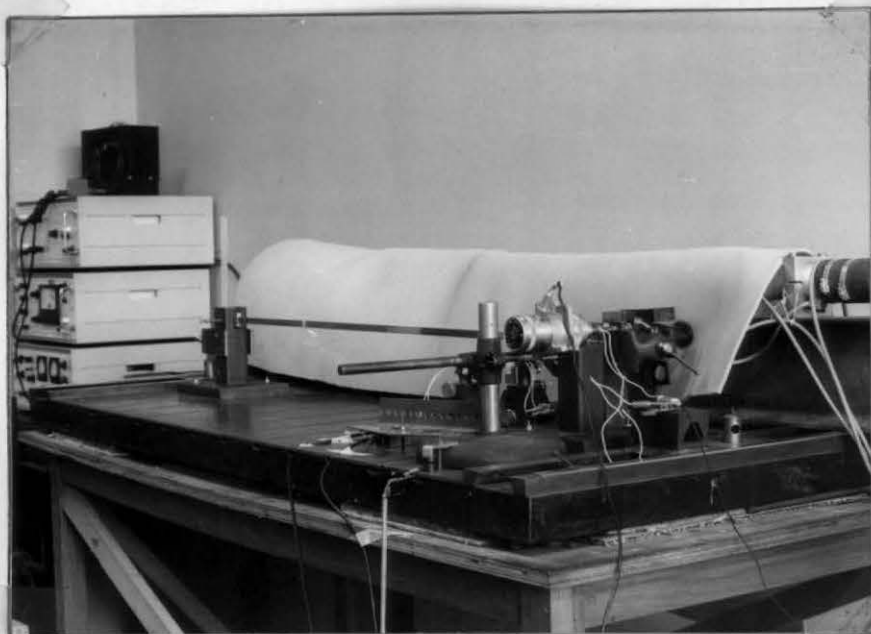


FOTO 1

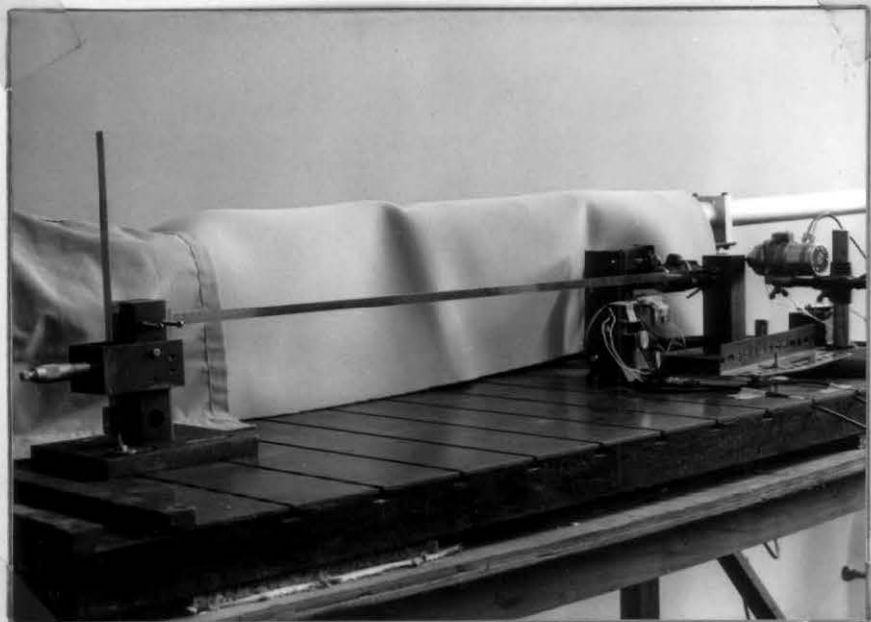


FOTO 2



FOTO 3

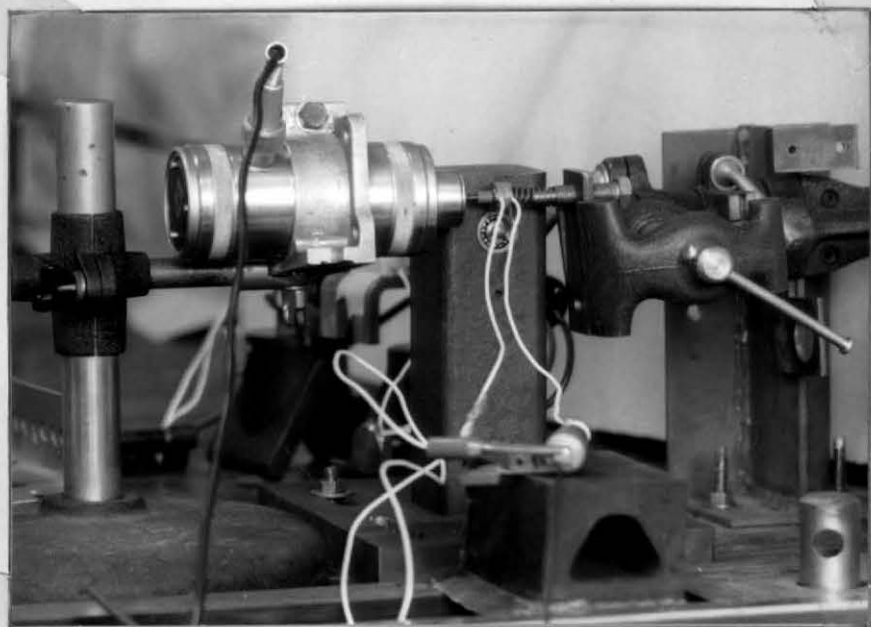


FOTO 4

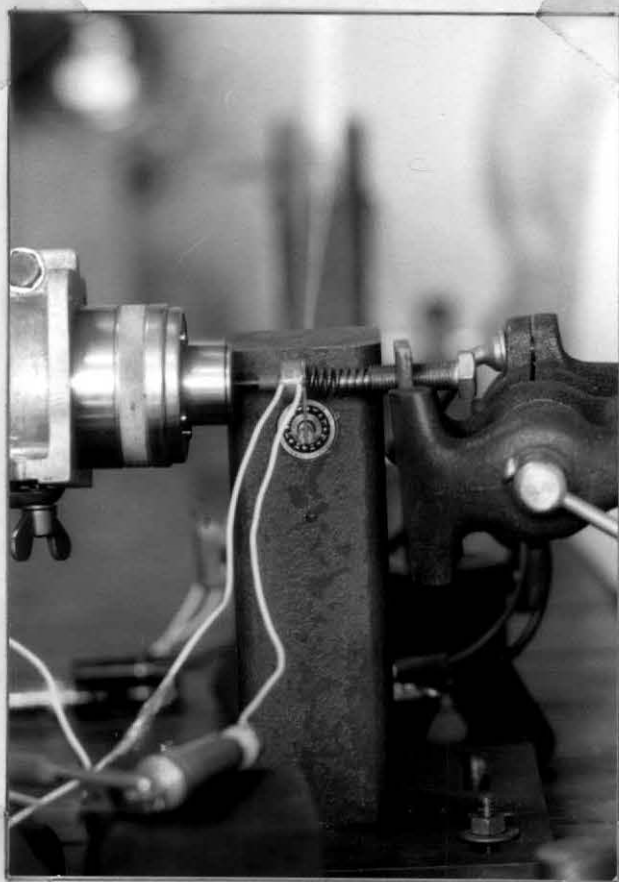


FOTO 5

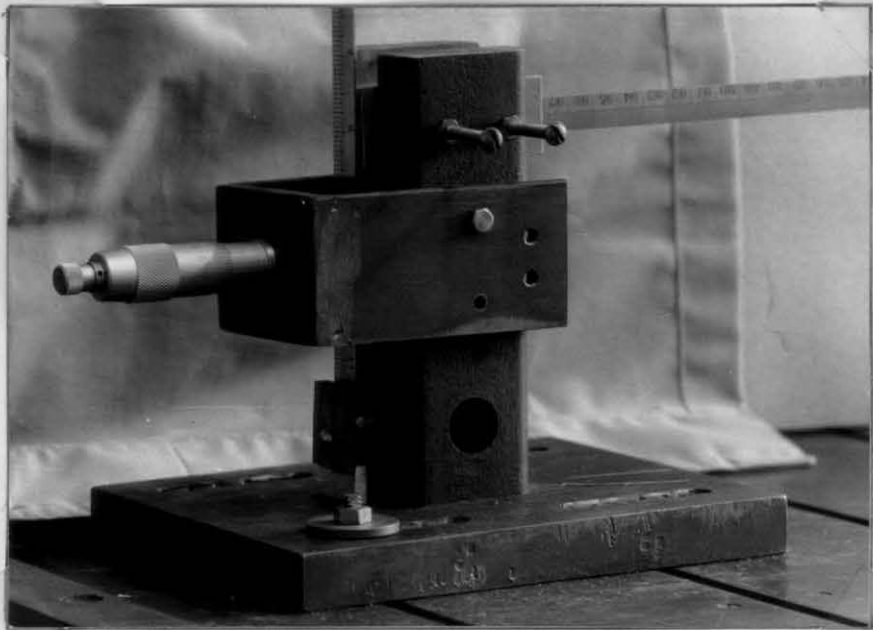


FOTO 6

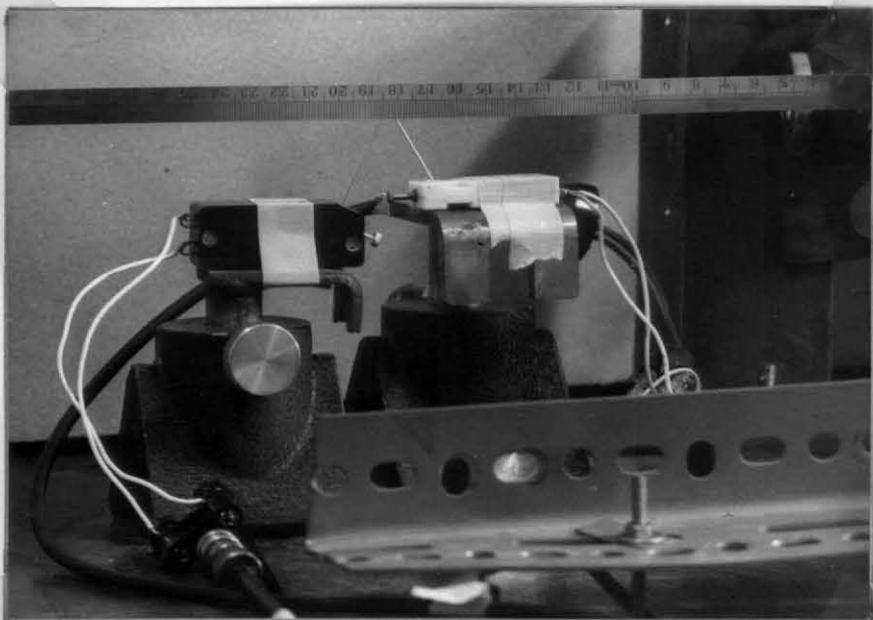


FOTO 7